

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A X-A

Filiera tehnologică – Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

SUBIECTUL I

Se consideră expresia $E(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$.

- a) Determinați mulțimea D a elementelor $x \in \mathbf{R}$ pentru care expresia dată are sens.
- b) Calculați $E(x) + E(-x), \forall x \in D$.
- c) Știind că $E\left(\frac{1}{3}\right) = a$ calculați $\log_5 8$ în funcție de a .

SUBIECTUL II

Fie $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ și $b = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{36+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}}}$.

- a) Arătați că $a = 2$.
- b) Calculați b^3 .
- c) Demonstrați că $\log_a^2 b + \log_b^2 a \geq \log_a b + \log_b a, \forall a, b \in (1, \infty)$.

SUBIECTUL III

Fie $A(a, b) = \frac{1}{\log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{3}}$ cu $a, b \in (0, \infty), a \neq b$.

- a) Calculați $A(3,1) + A(9,27)$.
- b) Demonstrați că $A(a, b) = A(b^{-1}, a^{-1}), \forall a, b \in (0, \infty), a \neq b$.
- c) Calculați $A(1,3) + A(3,5) + A(5,7) + \dots + A(79,81)$.

SUBIECTUL IV

- a) Demonstrați că $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbf{C}$.
- b) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \neq 0$ și $z_1 - 5z_2 + 3z_3 = 0$. Arătați că $\frac{1}{z_1} - \frac{5}{z_2} + \frac{3}{z_3} = 0$.
- c) Determinați soluțiile ecuației $-z^2 + iz + 1 = 0$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru efectiv trei ore.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014

Filiera tehnologică – Profilul servicii, resurse – toate specializarile profesionale
CLASA A X-A

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Pune condiția de existență a logaritmului

.....1p

Obține

$x \in (-1,1)$

.....1p

b) Calculează

$E(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$

....1p

Utilizează proprietățile logaritmilor și obține $E(x) + E(-x) = 0$

.....1p

c) Obține $a = \lg \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lg 2 = -a$

.....1p

Exprimă

$\log_5 8 = \frac{\lg 2^3}{\lg \frac{10}{2}} =$

.....1p

Utilizează proprietățile logaritmilor și obține

$\log_5 8 = \frac{-3a}{1+a}$ 1p

SUBIECTUL II

a) Aplică formula radicalilor compuși sau observă pătratul de binom sub fiecare radical și obține

$a = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)$

.....1p

Finalizează.....

.....1p

SAU

Calculează

$a^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} \right)^2 = 4$ 1p

Justifică a este pozitiv și obține $a=2$

.....1p

b) Raționalizează fiecare numitor și obține

$b = 1 + \frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2} + \dots + \frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}{6-5}$ 1p

Obține $b = \sqrt[3]{6}$ de unde $b^3 = 6$

.....1p

c) Notează $\log_a b = x$ și observă că
 $x > 0$ 1p

Notează $t = x + \frac{1}{x}$ și observă
 $t \geq 2$ 1p

Arată că $t^2 - t - 2 \geq 0$, oricare $t \geq 2$ relație echivalentă cu cea din enunț.....1p

SUBIECTUL III

a) Calculează
 $A(3,1) = -1$ 1p

Calculează $A(9,27) = 1$ și obține $A(3,1) + A(9,27) = 0$
1p

b)
 $A(b^{-1}, a^{-1}) = \frac{1}{\log_{\frac{b^{-1}}{a^{-1}}} \frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_{\frac{a}{b}} \frac{1}{3}} = A(a, b)$

.....2p
 c) Exprimă
 $A(a, b) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{a}{b}\right)$ 1p

Folosește proprietățile logaritmilor și obține
 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ 1p

Finalizează și
 obține $A(1,3) + A(3,5) + A(5,7) + \dots + A(79,81) = 4$ 1p

SUBIECTUL IV

a) Consideră $z = a + bi$ și obține
 $\bar{z} = a - bi$ 1p

Egalitatea devine $(a + bi)(a - bi) = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$ care este
 adevărată.....1p

b) Din a) observă $\frac{\bar{z}_k}{z_k} = \frac{|z_k|^2}{z_k}, \forall k \in \{1,2,3\}$
1p

Observă
 $\bar{z}_1 - 5\bar{z}_2 + 3\bar{z}_3 = 0$
1p

Folosește cele două observații de mai sus și obține egalitatea
 cerută.....1p

c) Calculează $\Delta = 3$ și găsește $z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{-2} = \frac{\pm \sqrt{3} + i}{2}$
 SAU înlocuiește $z = a + bi$ face calculele și ajunge la aceleași
 soluții.....2p