CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A X-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

Fie $a=\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$.

a) Arătaţi că $a^3+3a-6\sqrt{3}=0$.

b) Calculaţi $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2+3}{6}\right)+\log_a\left(\frac{6\sqrt{3}}{a}-3\right)+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{a}$.

c) Demonstraţi că $12^{\log_{\sqrt{3}}2}=2\left(4^{\log_{\sqrt{3}}2}+2^{\log_{\sqrt{3}}4}\right)$.

SUBIECTUL II

1. Fie $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}, \forall n\in\mathbf{N}^*$.

a) Demonstraţi că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

b) Calculaţi $\log_2 S_1+\log_2(\sqrt{3}+1)$ şi găsiţi cel mai mare număr natural $n\in\mathbf{N}^*$ pentru care are loc inegalitatea $\log_2 S_n\le\frac{1}{2}$.

2. Comparaţi numerele $m=\sqrt[3]{a^3+b^3}$ şi $n=\sqrt{a^2+b^2}$, $a,b\in\mathbf{R}_+^*$

SUBIECTUL III

a) Demonstraţi că $\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)\le|z_1|\cdot|z_2|$, $\forall z_1,z_2\in C$.

b) Demonstraţi că $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$, $\forall z_1,z_2\in C$.

c) Dacă $z\in C$ astfel încât $|z|\le\frac{1}{2014}$ arătaţi că $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)+\mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-z}\right)\le\frac{1}{2013}$.

SUBIECTUL IV

a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^{2014}-2x^{1007}+2=0$.

b) Dacă α este o soluţie a ecuaţiei de la a) determinaţi mulţimea punctelor din plan ale căror afixe verifică $\left|z-\alpha^{1007}\right|=\left|z-\left(\overline{\alpha}\right)^{1007}\right|$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2012
CLASA A X-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a)

$a^3=\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}\right)^3-$

$-3\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}\right)=$ 1p

adică $6\sqrt{3}-3\sqrt[3]{28-27}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}\right)=6\sqrt{3}-3a$ deci

$a^3+3a-6\sqrt{3}=0$ …………………1p

b) Din a) obţine $\left(\frac{a^2+3}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{a}$ şi

$\left(\frac{6\sqrt{3}}{a}-3\right)=a^2$ …………………………………………...……….1p

Înlocuieşte aceste rezultate în expresia de calculat şi aplică proprietăţile logaritmilor

$$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)+\log_a\left(a^2\right)+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{a}=1-\log_{\sqrt{3}}a+2\log_a a+\frac{\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{a}}{\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

……………………………………….1p

Finalizează şi obţine rezultatul 3………………...…………………………………….…………………..….1p

c)

$12^{\log_{\sqrt{3}}2}=2\left(4^{\log_{\sqrt{3}}2}+2^{\log_{\sqrt{3}}4}\right)\Leftrightarrow(3\cdot4)^{\log_{\sqrt{3}}2}=2\left(4^{\log_{\sqrt{3}}2}+4^{\log_{\sqrt{3}}2}\right)\Leftrightarrow3^{\log_{\sqrt{3}}2}\cdot4^{\log_{\sqrt{3}}2}=4\cdot4^{\log_{\sqrt{3}}2}$ ……………..1p

$\Leftrightarrow 2^{\log_{\sqrt{3}}3}\cdot4^{\log_{\sqrt{3}}2}=4\cdot4^{\log_{\sqrt{3}}2}$ care este adevărată……………………………………….………………....………1p

SUBIECTUL II

1.a) Ridică ambii membri la pătrat şi obţine o egalitate adevărată………………………..….……….…2p

b) Foloseşte a) în calculul lui S_1 şi aplică proprietăţile logaritmilor obţinând

$\log_2 S_1+\log_2(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{2}$ ………………..………………………………………………………………1p

Calculează $S_n=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2n+1}-1)}{2},\forall n\in N^*$ …………………………………….…...………1p

Determină $n=1$ ………………………………………………………………………….1p

2. Calculează $m^6 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ şi
$n^6 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$ ……………………..……………1p
Calculează $n^6 - m^6 = a^2b^2\left(2a^2 + 2b^2 + (a-b)^2\right) > 0$ de unde
$m < n$ …..……………………..……..………1p

SUBIECTUL III

a) Consideră $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in C$ şi înlocuieşte în relaţie şi obţine
$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ 1p
Demonstrează că relaţia de mai sus este adevărată
....1p

b)
$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ ………………………………………..1p

c) Pentru $z_1 = z$, $z_2 = \dfrac{1}{1-z}$ din a) se obţine
$\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) + \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \le |z| \cdot \left|\dfrac{1}{1-z}\right| = |z| \cdot \dfrac{1}{|1-z|}$ 1p
Aplică rezultatul de la b) şi obţine
$|1-z| \ge 1 - |z| \ge \dfrac{2013}{2014}$ ……………………..……………………..1p
Finalizează…………………………………………………………………………………………2p

SUBIECTUL IV

a) Notează $x^{1007} = t$ şi obţine ecuaţia
$t^2 - 2t + 2 = 0$ 1p
Rezolvă ecuaţia şi găseşte rădăcinile
$t_{1,2} = 1 \pm i$ 1p
Revine la substituţie şi scrie sub formă trigonometrică numerele
$1 \pm i$ 1p
Găseşte $x_k = \sqrt[2014]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{1007} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{1007}\right), k \in \{0,1,2,\ldots,1006\}$ respectiv
$x_k = \sqrt[2014]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{1007} + i\sin\dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{1007}\right), k \in \{0,1,2,\ldots,1006\}$...1p
b) Observă că α^{1007}, $\overline{\alpha}^{1007} \in \{1+i, 1-i\}$
.... 1p
Interpretează egalitatea din enunţ ca fiind caracterizarea punctelor egal depărtate de punctele de afixe
$1+i, 1-i$ 1p

Concluzionează că punctele cerute sunt punctele mediatoarei segmentului ale cărui extremităţi
sunt punctele de coordonate (1,1), repectiv (1,-1) , adică punctele dreptei y=0.......................................1p

SAU

Observă că α^{1007}, $\overline{\alpha}^{1007} \in \{1+i, 1-i\}$ 1p

Rezolvă ecuaţia $|z-1+i| = |z-1-i|$ luând $z = a+bi$ şi obţine $a \in R, b = 0$................................1p

Interpretează rezultatul obţinut ca reprezentând afixele punctelor de pe dreapta y=0…………….1p