CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 21 februarie 2014

CLASA A X-A

Filiera tehnologică – Profilul tehnic– Toate specializările profesionale

SUBIECTUL I

Se consideră expresia $E(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Determinaţi mulţimea D a elementelor $x\in\mathbf{R}$ pentru care expresia dată are sens.

b) Calculaţi $E(x)+E(-x),\forall x\in D$.

c) Ştiind că $E\left(\dfrac{1}{3}\right)=a$ calculaţi $\log_5 8$ în funcţie de *a*.

SUBIECTUL II

Fie $a=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ şi $b=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}}$.

a) Arătaţi că $a=2$.

b) Calculaţi b^3.

c) Demonstraţi că $\log_a^2 b+\log_b^2 a\ge\log_a b+\log_b a$, $\forall a,b\in(1,\infty)$.

SUBIECTUL III

Fie $A(a,b)=\dfrac{1}{\log_{\frac{a}{b}}\frac{1}{3}}$ cu $a,b\in(0,\infty),a\ne b$.

a) Calculaţi $A(3,1)+A(9,27)$.

b) Demonstraţi că $A(a,b)=A(b^{-1},a^{-1}),\forall a,b\in(0,\infty),a\ne b$.

c) Calculaţi $A(1,3)+A(3,5)+A(5,7)+\ldots+A(79,81)$.

SUBIECTUL IV

a) Demonstraţi că $z\cdot\overline{z}=|z|^2 ,\forall z\in C$.

b) Se consideră numerele complexe z_1,z_2,z_3 astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r\ne 0$ şi $z_1-5z_2+3z_3=0$. Arătaţi că $\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{5}{z_2}+\dfrac{3}{z_3}=0$.

c) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $-z^2+iz+1=0$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
etapa locală – 21 februarie 2014
Filiera tehnologică – Profilul servicii, resurse – toate specializarile profesionale
CLASA A X-A
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Pune condiţia de existenţă a logaritmului 1p

Obţine $x \in (-1,1)$ 1p

b) Calculează $E(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ 1p

Utilizează proprietăţile logaritmilor şi obţine $E(x) + E(-x) = 0$ 1p

c) Obţine $a = \lg \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lg 2 = -a$ 1p

Exprimă $\log_5 8 = \frac{\lg 2^3}{\lg \frac{10}{2}} =$ 1p

Utilizează proprietăţile logaritmilor şi obţine $\log_5 8 = \frac{-3a}{1+a}$ 1p

SUBIECTUL II

a) Aplică formula radicalilor compuşi sau observă pătratul de binom sub fiecare radical şi obţine

$a = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)$ 1p

Finalizează 1p

SAU

Calculează $a^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4$ 1p

Justifică a este pozitiv şi obţine a=2 ....1p

b) Raţionalizează fiecare numitor şi obţine

$b = 1 + \frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2} + ... + \frac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}{6-5}$ 1p

Obţine $b = \sqrt[3]{6}$ de unde $b^3 = 6$ 1p

c) Notează $\log_a b = x$ şi observă că
$x > 0$ 1p
Notează $t = x + \frac{1}{x}$ şi observă
$t \geq 2$...1p
Arată că $t^2 - t - 2 \geq 0$, oricare $t \geq 2$ relaţie echivalentă cu cea din enunţ...1p

SUBIECTUL III

a) Calculează
$A(3,1) = -1$ 1p
Calculează $A(9,27) = 1$ şi obţine $A(3,1) + A(9,27) = 0$
....1p
b)
$A(b^{-1}, a^{-1}) = \frac{1}{\log_{\frac{b^{-1}}{a^{-1}}} \frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_{\frac{a}{b}} \frac{1}{3}} = A(a,b)$ ....
......2p
c) Exprimă
$A(a,b) = \log_{\frac{1}{3}} (\frac{a}{b})$ 1p
Foloseşte proprietăţile logaritmilor şi obţine
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ 1p
Finalizează şi
obţine $A(1,3) + A(3,5) + A(5,7) + \ldots + A(79,81) = 4$ 1p

SUBIECTUL IV

a) Consideră $z = a + bi$ şi obţine
$\overline{z} = a - bi$ 1p
Egalitatea devine $(a+bi)(a-bi) = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$ care este adevărată...1p
b) Din a) observă $\overline{z_k} = \frac{|z_k|^2}{z_k}, \forall k \in \{1,2,3\}$
....1p
Observă
$\overline{z_1} - 5\overline{z_2} + 3\overline{z_3} = 0$...
..........1p
Foloseşte cele două observaţii de mai sus şi obţine egalitatea cerută...1p
c) Calculează $\Delta = 3$ şi găseşte $z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{-2} = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$
SAU înlocuieşte $z = a + bi$ face calculele şi ajunge la aceleaşi soluţii...2p