Ministerul Educaţiei Naţionale Inspectoratul Şcolar al Judeţului Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A X-A
Filiera teoretica – Profilul uman – specializarea Filologie, Ştiinţe Sociale

SUBIECTUL I

Fie $A(a,b)=\dfrac{1}{\log_{\frac{a}{b}}\frac{1}{3}}$ cu $a,b\in(0,\infty), a\neq b$.

a) Calculaţi $A(3,1)+A(9,27)$.

b) Demonstraţi că $A(a,b)=A(b^{-1},a^{-1}), \forall a,b\in(0,\infty), a\neq b$.

c) Calculaţi $A(1,3)+A(3,5)+A(5,7)+\ldots+A(79,81)$.

SUBIECTUL II

Se consideră expresia $E(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Determinaţi mulţimea D a elementelor $x\in R$ pentru care expresia dată are sens.

b) Calculaţi $E(x)+E(-x), \forall x\in D$.

c) Ştiind că $E\left(\dfrac{1}{3}\right)=a$ calculaţi lg50 în funcţie de *a*.

SUBIECTUL III

Fie numerele $a=\dfrac{\log_2 10}{\log_{20} 2}-\dfrac{\log_2 5}{\log_{40} 2}$ şi $b=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

a) Arătaţi că $a=2$.

b) Demonstraţi că $b=3$.

c) Arătaţi că $a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}=0$.

SUBIECTUL IV

Fie $E(x)=\left(-\sqrt[3]{x^{0,5}}\right)^6+x^{-0,(6)}\cdot\left(-3\cdot\dfrac{x}{x^{0,1(6)}}\right)^2, x>0$ şi $a\in R$ astfel

încât $\dfrac{a}{\sqrt{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{10}-2}}{(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54})\cdot\sqrt{2}}$.

a) Arătaţi că $E(x)=10x, \forall x>0$.

b) Arătaţi că a^{-3} este pătrat perfect.

c) Arătaţi că are loc egalitatea $\left(E(x^{-1})\right)^3=E(E(E(x^{-3}))), \forall x>0$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

Ministerul Educaţiei Naţionale Inspectoratul Şcolar al Judeţului Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A X-A
Filiera teoretica – Profilul uman – specializarea Filologie, Ştiinţe Sociale
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Calculează $A(3,1)=-1$ 1p

Calculează $A(9,27)=1$ şi obţine $A(3,1)+A(9,27)=0$ 1p

b) $A(b^{-1},a^{-1})=\dfrac{1}{\log_{\frac{b^{-1}}{a^{-1}}}\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\log_{\frac{a}{b}}\frac{1}{3}}=A(a,b)$ 2p

c) Exprimă $A(a,b)=\log_{\frac{1}{3}}(\frac{a}{b})$ 1p

Foloseşte proprietăţile logaritmilor şi obţine $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}$ 1p

Obţine $A(1,3)+A(3,5)+A(5,7)+\ldots+A(79,81)=4$ 1p

SUBIECTUL II

a) Pune condiţia de existenţă a logaritmului 1p

Obţine $x\in(-1,1)$ 1p

b) Calculează $E(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$ 1p

Utilizează proprietăţile logaritmilor şi obţine $E(x)+E(-x)=0$ 1p

c) Obţine $a=\lg\dfrac{1}{2}$ 1p

Exprimă $\lg 50=\lg(100\cdot\frac{1}{2})$ 1p

Utilizează proprietăţile logaritmilor şi obţine $E\left(\dfrac{1}{3}\right)=2+a$ 1p

SUBIECTUL III

a) Schimbă baza logaritmilor în baza 2 , notează $\log_2 10=x$ 1p

Exprimă 20 şi 40 ca produse de puteri ale lui 2 şi 10 , utilizeaza proprietăţile logaritmilor şi obţine

$a=\dfrac{x}{\frac{1}{1+x}}-\dfrac{x-1}{\frac{1}{2+x}}$ 1p

Efectuează calculul algebric şi obţine a=2....................................1p

b) Ridică la puterea a treia şi obţine $b^3-3b-18=0$ 1p

Descompune în factori $b^3-3b-18=(b-3)(b^2+3b+6)$ şi determină *b=3*.................................... 1p

c) $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}=0\Leftrightarrow 2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$, logaritmează în baza 2 şi obţine $\dfrac{\sqrt{\log_2 3}}{\log_2 3}=\sqrt{\log_3 2}$ 1p

Finalizează....................................1p

SUBIECTUL IV

a) Scrie expresia transformând puterile în puteri cu exponent raţional şi ajunge la

$E(x)=\left(-x^{\frac{1}{6}}\right)^{6}+x^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-3\cdot\frac{x}{x^{\frac{15}{90}}}\right)^{2}$ 1p

Foloseşte regulile de calcul cu puteri şi obţine $E(x)=x+9x$ 1p

Finalizează $E(x)=10x$ 1p

b) Aplică proprietatea fundamentală a proporţiilor , scoate factori de sub radical şi obţine

$2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a=\sqrt{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{10}-2}$ 1p

Obţine $a=2^{-\frac{4}{3}}$ de unde $a^{-3}=\left(2^{2}\right)^{2}$ pătrat perfect...1p

c) Calculează membrul stâng folosind a) şi obţine $\left(E(x^{-1})\right)^{3}=1000x^{-3}$ 1p

Calculează membrul drept folosind a), obţine $E(E(E(x^{-3})))=1000\,x^{-3}$ şi finalizează.....................1p