

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A XI-A

Filiera tehnologică-Profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

SUBIECTUL I

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

- Calculați A^2 .
- Demonstrați că $B(a) \cdot B(b) = B(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- Determinați două matrice $C \in M_{31}(\mathbb{R})$ și $D \in M_{13}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = CD$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră determinantul $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ unde $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}^*$.

- Calculați determinantul D știind că numărul natural $\overline{abcdefghi}$ este cel mai mare număr natural par cu 9 cifre distincte.
- Calculați determinantul D știind că numerele $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}^*$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

2. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{2x-1}}$.

- Stabiliți D , domeniul maxim de definiție al funcției.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.
- Determinați asimptotele funcției.

SUBIECTUL IV

1. Se consider funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a \ln 2 \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, & x \leq 1 \\ \frac{2^{\frac{1-x}{x}} - 1}{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$,

- Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că există $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- Determinați asimptotele spre ∞ și spre $-\infty$ la graficul funcției.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv trei ore. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 10 puncte

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală –21 februarie 2014 -

CLASA A XI-A

Filiera tehnologică-Profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Calculează A^2 și obține $A^2 = O_3$	2p
b) $B(a) \cdot B(b) = (I_3 + aA)(I_3 + bA) = I_3^2 + aAI_3 + bI_3A + abA^2$ $= I_3 + (a+b)A = B(a+b)$	1p 2p
c) Găsește două matrice $C \in M_{31}(R)$ și $D \in M_{13}(R)$ astfel încât $A = CD$, de exemplu $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $D = (2 \ -1 \ -1)$.	2p

SUBIECTUL II

1. a) $D = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	1p
$D = -9$	1p
b) Cum numerele $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de rație $q \Rightarrow D = \begin{vmatrix} a & aq & aq^2 \\ aq^3 & aq^4 & aq^5 \\ aq^6 & aq^7 & aq^8 \end{vmatrix}$	1p
$\Rightarrow D = q^3 \begin{vmatrix} a & aq & aq^2 \\ a & aq & aq^2 \\ aq^6 & aq^7 & aq^8 \end{vmatrix} = 0$	1p
2. Ecuația este echivalentă cu : $(7-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$	1p
Finalizare $x \in \{7, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$	2p

SUBIECTUL III

<p>a) Impune condițiile: $x - 1 \geq 0$; $2x - 1 \geq 0$; $3 - \sqrt{2x - 1} \neq 0$ Deduce $D_{\maxim} = [1, \infty) \setminus \{5\}$</p>	<p>1p</p>
<p>b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{10 - 2x} \cdot \frac{3 + \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x - 1} + 2}$ $= -\frac{3}{4}$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
<p>c) Din b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ graficul funcției f nu admite asimptotă verticală $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ dreapta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ asimptotă orizontală spre ∞.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL IV

<p>1. a) Calculează $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\frac{1}{2} \ln 2$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = a\sqrt{2} \ln 2$ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$, de unde $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln 2 \frac{x + 1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$ $= -a \ln 2 \Rightarrow y = -a \ln 2$ asimptotă spre $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ ecuația asimptotei spre ∞</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>