CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A XI-A
Filiera teoretică: profil real, specializarea Ştiinţe ale Naturii

SUBIECTUL I

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B(a)=I_3+aA$, $a\in R$.

a) Demonstraţi că $B(a)\cdot B(b)=B(a+b+ab), \forall a,b\in R$.

b) Determinaţi două matrice $C\in M_{31}(R)$ şi $D\in M_{13}(R)$ astfel încât $A=CD$.

c) Determinaţi $B^n(a)$, $\forall n\in N^*$.

SUBIECTUL II

1. Se considerădeterminantul $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ undea,b,c,d,e,f,g,h,i $\in R^*$.

a) Calculaţi determinantul D ştiind că numerele a,b,c,d,e,f,g,h,i sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Demonstraţi că dacă numerele naturale $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$ sunt divizibile cu 37 atunci numărul $1000D$ este divizibil cu 37.

2. Rezolvaţiîn R ecuaţia: $\begin{vmatrix} x+1 & 2x+3 & 3x+5 \\ 2x+3 & 3x+5 & 4x+7 \\ 3x+3 & 5x+8 & 11x+13 \end{vmatrix}=0$

SUBIECTUL III

1.Se considerăfuncţia $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} a\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}, & x\le 1 \\ x^4\left(2^{\frac{1}{x^2+1}}-2^{\frac{1}{x^2}}\right), & x>1 \end{cases}$,

a) Determinaţi $a\in R$ştiindcăexistă $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Calculaţi,în funcţie de a, distanţa între asimptota la ∞ şi asimptota la $-\infty$ la graficul funcţiei.

SUBIECTUL IV

1.Se consider funcția $f:D\to R$ $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{2}{|x|}\right)$.

a)Aflaţi D, domeniul maxim de definiţie al funcţieişideterminați asimptotele verticale la graficul funcţiei .

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x+1)}{x^{-2}}$.

2. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1+x^2\sin^2 x}-\cos x}$.

Notă: Toatesubiectelesuntobligatorii.Timp de lucru efectiv trei ore. Pentru fiecare problemă rezolvată se acordă 10 puncte.

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală –21 februarie 2014 -
CLASA A XI-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE

SUBIECTUL I

a) $B(a)\cdot B(b)=(I_3+aA)(I_3+bA)=I_3^2+aAI_3+bI_3A+abA^2$ $=I_3+(a+b+ab)A=B(a+b+ab)$	**1p** **1p**
b) Găseşte două matrice $C\in M_{31}(R)$ şi $D\in M_{13}(R)$ astfel încât $A=CD$	**2p**
c) Din punctul **a)** deduce $B^2(a)=B(2a+a^2)=B((a+1)^2-1)$. Intuieşte $B^n(a)=B((a+1)^n-1),\ \forall n\in N^*$ Demonstrează formula găsită prin metoda inducţiei matematice.	**1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL II

a) numerele a,b,c,d,e,f,g,h,i sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Rightarrow b=\dfrac{a+c}{2}, e=\dfrac{d+f}{2}, h=\dfrac{g+i}{2}$ de unde $D=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}a & a+c & c\\ d & d+f & f\\ g & g+i & i\end{vmatrix}=0$	**1p** **1p**
b) $D=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix}100a & 10b & c\\ 100d & 10e & f\\ 100g & 10h & i\end{vmatrix}$ $=\dfrac{1}{1000}\cdot\begin{vmatrix}\overline{abc} & 10b & c\\ \overline{def} & 10e & f\\ \overline{ghi} & 10h & i\end{vmatrix}=\dfrac{1}{1000}\cdot\begin{vmatrix}37k & 10b & c\\ 37p & 10e & f\\ 37q & 10h & i\end{vmatrix}$ $\Rightarrow 1000D=37\begin{vmatrix}k & 10b & c\\ p & 10e & f\\ q & 10h & i\end{vmatrix}$. Cum k,p,q,b,e,h,c,f,i sunt numere întregi $\Rightarrow\begin{vmatrix}k & 10b & c\\ p & 10e & f\\ q & 10h & i\end{vmatrix}\in Z\Rightarrow 1000D\,\vdots\,37$	**1p** **1p** **1p**
2. $\begin{vmatrix}x+1 & 2x+3 & 3x+5\\ 2x+3 & 3x+5 & 4x+7\\ 3x+3 & 5x+8 & 11x+13\end{vmatrix}=0\ \overset{\substack{C3\to C3-C2\\ C2\to C2-C1}}{\Leftrightarrow}\ \begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x+2\\ 2x+3 & x+2 & x+2\\ 3x+3 & 2x+5 & 6x+5\end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow -4x(x+2)^2=0\Rightarrow x\in\{0,-2\}$	**1p** **1p**

SUBIECTUL III

a) Calculează $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\sqrt{2}-2$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=a\sqrt{2}$ $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$, de unde $a=1-\sqrt{2}$	**1p** **1p**
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} a\dfrac{-x-1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ $=a \Rightarrow y=a$ asimptota spre $-\infty$ la graficul funcţiei $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\ln 2 \Rightarrow y=-\ln 2$ asimptota spre ∞ la graficul funcţiei Distanţa între cele două drepte paralele este $\lvert a+\ln 2\rvert$	**1p** **1p** **2p** **1p**

SUBIECTUL IV

1. a) $1-\dfrac{2}{\lvert x\rvert}>0$, $\lvert x\rvert \neq 0$ Deduce $D_{\max}=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow x=-2$ şi $x=2$ asimptote verticale la graficul funcţiei	**1p** **2p** **1p** **1p**
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)-f(x+1)}{x^{-2}}=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x^2-x}\right)}{x^{-2}}$ $=-2$	**1p** **1p**
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1+x^2\sin^2 x}-\cos x}=\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2(\sqrt{1+x^2\sin^2 x}+\cos x)}{1+x^2\sin^2 x-\cos^2 x}$ $\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{(\sqrt{1+x^2\sin^2 x}+\cos x)}{(1+x^2)}=1\cdot 1\cdot 1=1$	**1p** **1p**