CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 21 februarie 2014

CLASA A XII-A

Filiera tehnologică: Profil servicii, resurse naturale si protectia mediului

SUBIECTUL I

Se consideră legea de compoziţie $x * y = x + y + 2014m \cdot x \cdot y$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$ şi $m \in \mathbf{R}$.

a) Aflaţi valoarea parametrului real ***m*** pentru care $(-1)*(-1) = -1$.

b) Pentru $m = -\frac{1}{2014}$, ştiind că legea „$*$”este asociativă,

calculaţi $E = \frac{1}{2014} * \frac{1}{2013} * \ldots * \frac{1}{2} * 1 * 2 * \ldots * 2013 * 2014.$

c) Pentru $m = \frac{1}{2014}$, ştiind că $(\mathbf{R} - \{-1\}, *)$ este grup, determinaţi numerele reale ***a*** şi ***b*** pentru care funcţia $f : \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}^*$, $f(x) = ax + b$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbf{R} - \{-1\}, *)$ şi $(\mathbf{R}^*, \cdot)$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea $G = (-3, 3)$ se defineşte legea asociativă $x \circ y = \frac{9(x+y)}{9+xy}$, $(\forall)x, y \in G$

a) Determinaţi elementul neutru al legii "$\circ$".

b) Calculaţi $2 \circ \left(\frac{1}{2}\right)'$, unde x' este simetricul elementului x în raport cu legea „$\circ$”.

c) Dacă $f : G \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcţiei $h : (-3,3) \to \mathbf{R}, h(x) = \frac{1}{9 - x^2}$ al cărei grafic conţine punctul O(0,0), atunci demonstraţi că funcţia ***f*** este un morfism între grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbf{R}, +)$.

SUBIECTUL III

Fie funcţia $f : (\mathbf{0}, \infty) \to \mathbf{R}$, $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} - 5, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{1}{x(1 + \ln x)}, & x > 1 \end{cases}$.

a) Verificaţi dacă funcţia ***f*** admite primitive pe **R .**

b) Calculaţi $\int \frac{f(x) + 5}{x + 2} dx$, $x \in (0,1)$.

c) Fie $g : (1, \infty) \to R, g(x) = f(x), \forall x \in (1, \infty)$. Arătaţi că orice primitivă G a funcţiei g este concavă pe $(1, \infty)$.

SUBIECTUL IV

Fie funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathrm{f}(x) = x^2 + a \cdot x$, $g(x) = b \cdot x \cdot f(x)$.

a) Determinati numerele reala ***a*** şi ***b*** pentru care funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

Pentru $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = \frac{1}{3}$: b) Calculaţi $\int \frac{\sqrt[3]{f'(x)} + f(x)}{g(x)} dx$, $x > 0$ c) Calculaţi $\int \frac{3g(x) - 1}{x^2 + x + 1} dx$, $x \in R$.

- *Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A XII-A
Filiera tehnologică – Profil servicii, resurse naturale si protectia mediului
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Calculează $(-1)*(-1)=-2+2014m$ ………………………………… **1p**

finalizează: $m=\frac{1}{2014}$ ……………………………………………… **1p**

b) $m=-\frac{1}{2014}\Rightarrow x*y=x+y-xy$

Observă că $x*1=1*x=1, \forall x\in\mathbf{R}$ …………………….……… **1p**

finalizează : ***E= 1*** …………………………..………………… **1p**

c) $m=\frac{1}{2014}\Rightarrow x*y=x+y+xy$

$f(x*y)=f(x)\cdot f(y), \forall x,y\in\mathbf{R}-\{-1\}$

$axy+ax+ay+b=a^2xy+abx+aby+b^2$, $\forall x,y\in\mathbf{R}-\{-1\}$ ……………..… **1p**

Deduce $a^2=a$ şi $ab=a$

Cum f injectivă $\Rightarrow a\neq 0\Rightarrow a=1$ şi $b=1$ ……..…………………..………… **1p**

Demonstrează că $f:R\setminus\{-1\}\to R^*$, $f(x)=x+1$ este bijectivă ………… **1p**

SUBIECTUL II

a) Definiţia elementului neutru ………………………………………… **1p**

Determinarea elementului neutru $e=0\in G$ …………………………… **1p**

b) Determinarea simetricului $\left(\frac{1}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\in G$ …………………………… **1p**

De unde $2\circ\left(\frac{1}{2}\right)'=\frac{27}{16}$ …………………………………………………… **1p**

c) Determinarea funcţiei $f:(-3,3)\to R,\ f(x)=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)+c$ ……….. **1p**

Determină c=0 ………………………………………………………… **1p**

Demonstrează $f(x\circ y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(-3,3)$ …………..…………… **1p**

SUBIECTUL III

a) $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x(1+\ln x)}=1$, f(1)=1 , **1p**

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}-5=1$ …......................... **1p**

$\Rightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow f$ continuă în 1. Justifică f continua pe R

$\Rightarrow$f admite primitive **1p**

b) $\int\frac{f(x)+5}{x+2}dx=\int(\sqrt{x}+1)\,dx$ **1p**

$= \frac{2}{3}x(\sqrt{x}+1)+C$ **1p**

c) Fie G o primitivă pentru g $\Rightarrow$

$G''(x) = g'(x) = -\frac{2+\ln x}{x^2(1+\ln x)^2}, \quad \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow$ **1p**

Justifică $G''(x) < 0, \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow G$ concavă pe $(1,\infty)$ **..1p**

SUBIECTUL IV

a) $g'(x) = 3bx^2 + 2abx$, $x \in R$ **1p**

g primitivă pentru $f \Rightarrow g'(x) = f(x), \forall x > 0 \Rightarrow 3bx^2 + 2abx = x^2 + ax, \forall x \in R$

$\Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{3}$ **1p**

b) $\int \frac{\sqrt[3]{f'(x)} + f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{3(\sqrt[3]{2x} + x^2)}{x^3}dx =$ **1p**

$= 3\sqrt[3]{2}\int x^{-\frac{8}{3}}dx + 3\int \frac{1}{x}dx =$ **1p**

$= -\frac{9\sqrt[3]{2}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + 3\ln|x| + C = -\frac{9\sqrt[3]{2}}{5x\sqrt[3]{x^2}} + 3\ln x + C$ **1p**

c) $\int \frac{3g(x)-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx = \int (x-1)dx$ **1p**

$= \frac{x^2}{2} - x + C$ **1p**