CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 21 februarie 2014

CLASA A XII-A

Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL I

Se consideră legea de compoziţie asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2014}$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$.

a) Daţi exemple de două numere reale x şi y pentru care $x * y$ este un număr natural.

b) Presupunând cunoscut faptul că $(\mathbf{R}\ ,*)$ este grup, arătaţi că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-2014}$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbf{R},+)$ şi $(\mathbf{R}\ ,*)$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\, 2014\, ori} = -\sqrt[3]{2014}$.

SUBIECTUL II

Fie mulţimea $\mathrm{F}=\left\{ f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \,\middle|\, f_a(x)=ax+3-3a\ ,a\in\mathbf{R}^* \right\}$.

a) Arătaţi că oricare ar fi $f_a, f_b \in \mathrm{F}$ avem $f_a \circ f_b \in \mathrm{F}$.

b) Arătaţi că F este grup împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor .

c) Demonstraţi că grupul $(\mathrm{F}, \circ)$ este izomorf cu grupul $(R^*, \cdot)$.

SUBIECTUL III

Fie funcţia $f:[-1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=2014\cdot(1+x)+2015\cdot e^x$.

a) Determinaţi $k\in\mathbf{R}$ astfel încât $f(x)-f'(x)=k\cdot x$, $(\forall)x\geq -1$

b) Arătaţi că funcţia $g:[-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=\ln(f(x))$ este o primitivă a funcţiei $h:[-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ şi calculaţi $\int\dfrac{x}{f(x)}dx$, $x\geq -1$.

c) Arătaţi că funcţia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases} e\cdot f(x) & , x\geq -1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}+2012 & , x<-1 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbf{R}$ şi calculaţi o primitivă a sa.

SUBIECTUL IV

Fie $x\in(1,\infty), n\in\mathbf{N}$ şi $I_n=\int\dfrac{x^n}{2x^2-3x+1}dx$.

a) Demonstrați că $I_0-2I_1=-\ln(x-1)+\mathrm{C}$, $x\in(1,\infty)$

b) Arătaţi că $2I_{n+2}-3I_{n+1}+I_n=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\mathrm{C}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

c) Calculaţi $2I_6-I_5$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A XII-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiinţe ale naturii
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Găseşte o pereche de numere x, y cu proprietatea cerută(de exemplu $x=1,\ \ y=\sqrt[3]{-2014}$)...... **1p**
Arată ca $x*y=1\in\mathbf{N}$ **1p**
b) Justifică bijectivitatea **1p**
Demonstrează $f(x+y)=f(x)*f(y),\forall x,y\in R$ **2p**
c) Determină $\underbrace{x*x*....*x}_{de\,2014\,ori}=\sqrt[3]{2014x^3+2013\cdot 2014}$ **1p**
Obţine $x=-\sqrt[3]{2014}$ **1p**

SUBIECTUL II

a) Fie $f_a, f_b\in$ F . Demonstrează $(f_a\circ f_b)(x)=f_{ab}(x),\forall f_a, f_b\in F$ **1p**
Cum $a\neq 0\ ,b\neq 0\Rightarrow ab\neq 0\Rightarrow\ f_{ab}\in$ F , $\forall a,b\in R^*$ **1p**
b) Justifică asociativitatea şi determină elementul neutru $f_1\in$ F **1p**
Stabileşte, cum $a\neq 0$, că $\forall f_a\in$ F este simetrizabil şi $(f_a)'=f_{a^{-1}}\in$ F **1p**
c) Fie $\varphi:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R},\ \varphi(a)=f_a$ **1p**
Justifică bijectivitatea **1p**
Demonstrează $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\circ\varphi(b),\forall a,b\in R^*$ **1p**

SUBIECTUL III
a) $f'(x)=2014+2015\cdot e^x, x\geq -1$.. **1p**
$\Rightarrow f(x)-f'(x)=kx\Rightarrow 2014x=kx,\forall x\geq -1$
$\Rightarrow k=2014$.. **1p**

b) $g'(x)=(\ln(f(x)))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=h(x)\ \ ,\forall x\in[-1,\infty)$

$\Rightarrow g'(x)=h(x),\forall x\in[-1,\infty)\Rightarrow$ g primitivă pentru h **1p**

$$\int\frac{x}{f(x)}dx=\frac{1}{2014}\int\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{2014}-\frac{\ln(f(x))}{2014}+C$$ **1p**

c) Justifică f continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow$f admite primitive.. **1p**

Determină $G(x)=\begin{cases} e(2014x+1007x^2+2015e^x)+\mathbf{c}_1 & ,x>-1\\ \dfrac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}-\dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+2013x+\mathbf{c}_2 & ,\ x\leq -1\end{cases}$ **1p**

Din condiţia de continuitate a lui G avem $\mathbf{c}_2=4029{,}35-1007e+\mathbf{c}_1$.

$$G(x)=\begin{cases} e(2014x+1007x^2+2015e^x)+\mathbf{c}_1 & ,x>-1 \\ \dfrac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}-\dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+2013x+4029,35-1007e+\mathbf{c}_1 & ,\quad x\le -1 \end{cases}$$ **1p**

SUBIECTUL IV

a) a) $I_0-2I_1=\int\frac{1}{2x^2-3x+1}dx-\int\frac{2x}{2x^2-3x+1}dx=\int\frac{1-2x}{2x^2-3x+1}dx$ ……………………… **1p**

$\int\frac{1-2x}{(x-1)(2x-1)}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx=-\ln(x-1)+C$ ……………………………………….. 1p

b) $2I_{n+2}-3I_{n+1}+I_n=2\int\frac{x^{n+2}}{2x^2-3x+1}dx-3\int\frac{x^{n+1}}{2x^2-3x+1}dx+\int\frac{x^n}{2x^2-3x+1}dx$ …………… 1p

$=\int\frac{x^n(2x^2-3x+1)}{2x^2-3x+1}dx=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\in\mathbf{N}$ ……………………………………….. 1p

c)Aplică succesiv relația de la b) :

$$\left.\begin{aligned} 2I_6-3I_5+I_4&=\frac{x^5}{5}+C \\ 2I_5-3I_4+I_3&=\frac{x^4}{4}+C \\ 2I_4-3I_3+I_2&=\frac{x^3}{3}+C \\ 2I_3-3I_2+I_1&=\frac{x^2}{2}+C \\ 2I_2-3I_1+I_0&=\frac{x}{1}+C \end{aligned}\right| +$$ ……………………………………………………………….. 1p

$2I_6-I_5-2I_1+I_0=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$ 1p

$2I_6-I_5=2I_1-I_0+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)+C$ 1p