INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BACĂU

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA V

SUBIECTUL I

a) Verificaţi dacă numărul
$$a = 2^{20}\left\{11^2 : 121 + 3\left[\left(3^5 \cdot 2^3\right)^{10} : \left(6^{30} \cdot 3^{19}\right) - 2014^0\right]\right\} - 7$$
este divizibil cu 7 şi cu 5.

b) Aflaţi restul împărţirii numărului $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2015$ la 2014.

SUBIECTUL II

Aflaţi elementele mulţimilor A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile :

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră a sistemului zecimal}\}$;

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } 7^n, \text{ cu } n \text{ număr natural}\}$;

c) A şi B au acelaşi număr de elemente;

d) Suma elementelor mulţimii A este mai mare decât suma elementelor mulţimii B;

e) $B \setminus A = \{5\}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimile infinite de numere naturale:
$$A = \{x \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}\} \text{ şi } B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\},$$
unde $a_1 = 2,\ a_2 = a_1 + 5,\ a_3 = a_2 + 5,\ a_4 = a_3 + 5$ şi aşa mai departe.

Arătaţi că:

a) $4017 \in B$ şi $2014 \notin B$;

b) mulţimile A şi B sunt disjuncte;

c) $\left\{16,\ 1156,\ 111556,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{\text{de 8 ori}}\underbrace{55\ldots5}_{\text{de 7 ori}}6,\ \underbrace{11\ldots1}_{\text{de 9 ori}}\underbrace{55\ldots5}_{\text{de 8 ori}}6\right\} \subset A$.

SUBIECTUL IV

Matei şi Paul joacă urmatorul joc:

"Pe o tablă este scris numărul 16. Matei adună la numărul 16 un număr oarecare de la 1 la 9 şi scrie pe tablă rezultatul sumei. Apoi, Paul adună la numărul scris de Matei pe tablă un număr de la 1 la 9 şi scrie rezultatul pe tablă. Jocul va continua în acelaşi mod (fiecare dintre concurenţi adună la ultimul număr scris de celălalt pe tablă un număr oarecare de la 1 la 9). Câştigă cel care ajunge primul la 2014".

Care va fi strategia lui Matei pentru a câştiga jocul?

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA a V-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL I

I a) $\left(3^5 \cdot 2^3\right)^{10} = 3^{50} \cdot 2^{30}$	**0.5p**
$6^{30} \cdot 3^{19} = 3^{49} \cdot 2^{30}$	**1p**
$\left(3^{50} \cdot 2^{30}\right) : \left(3^{49} \cdot 2^{30}\right) = 3$	**0.5p**
$2^{20}\left[11^2 : 121 + 3 \cdot (3-1)\right] - 7 = 2^{20} \cdot 7 - 7$	**0.5p**
$7\left(2^{20} - 1\right)$ se divide cu 7	**0.5p**
$\mathrm{u}\left(2^{20}\right) = 6$	**0.5p**
$u\left(2^{20} - 1\right) = 5, u(a) = 5$ deci numărul a se divide cu 5	**0.5p**
I b) $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1006 \cdot 1007 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2014 + 1$	**0.5p**
$b = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1006 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot (2 \cdot 1007) + 2014 + 1$	**1p**
$b = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1006 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2013 \cdot 2014 + 2014 + 1$	**0.5p**
$b = 2014 \cdot (\ 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1006 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2013 + 1 \ ) + 1$	**0.5p**
Din teorema împărţirii cu rest avem că restul este 1	**0.5p**
TOTAL	**7p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA a V-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL II

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	**1p**
$A \cap B = \{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow A \supset \{1, 3, 7, 9\}$ şi $B \supset \{1, 3, 7, 9\}$	**2p**
$B \setminus A = \{5\} \Rightarrow 5 \in B$ şi $5 \notin A$	**1p**
Numărul elementelor fiecărei mulţimi trebuie să fie 7	**1p**
Soluţii : $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ sau $A = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ sau $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ sau $A = \{1, 0, 3, 6, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{2, 1, 3, 5, 4, 7, 9\}$	**2p**
TOTAL	**7p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA a V-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL III

a)	$a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$, $a_3 = a_2 + 5 = 2 + 2\cdot 5 = 12$, $a_4 = a_3 + 5 = 2 + 3\cdot 5 = 17$, …………………………	**1p**
	$\Rightarrow a_n = 2 + (n-1)\cdot 5$	**1p**
	$4017 \in B \Leftrightarrow 4017 = 2 + (n-1)\cdot 5$ şi $n \in \mathbb{N}$. Cum $n = 804$, rezultă că $4017 \in B$	**1p**
	$2014 \in B \Leftrightarrow 2014 = 2 + (n-1)\cdot 5$ şi $n \in \mathbb{N}$. Cum $n = 2017 : 5$ şi $2017 : 5 \notin \mathbb{N}$, rezultă că $2014 \notin B$	**1p**
b)	Oricare ar fi $x \in A \Rightarrow \text{u}(x) \in \{0,1,4,5,6,9\}$ Oricare ar fi $x \in B \Rightarrow \text{u}(x) \in \{2,7\}$ Din relaţiile anterioare rezultă că mulţimile A şi B sunt disjuncte	**1p**
c)	$16 = 4^2$, deci $16 \in A$; $1156 = 34^2$, deci $1156 \in A$; $111556 = 334^2$, deci $111556 \in A$; ………………………………	**1p**
	$\underbrace{11...1}_{\text{de 9 ori}}\underbrace{55...5}_{\text{de 8 ori}}6 = \underbrace{33...3}_{\text{de 8 ori}}4^2$, deci $\underbrace{11...1}_{\text{de 9 ori}}\underbrace{55...5}_{\text{de 8 ori}}6 \in A$ Rezultă concluzia.	**1p**
TOTAL		**7p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA a V-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL IV

Se observă că $2014 = 10\cdot 199 + 24$	**2p**
Mai întâi, Matei va aduna 8 şi va scrie numărul $16+8=24$.	
Dacă Paul adună $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, atunci la a doua mişcare, Matei va aduna $10-x$ şi va scrie pe tablă numărul $24+x+10-x=34$ şi aşa mai departe.	**2p**
La fiecare etapă, atunci când Paul va aduna y, Matei urmează să adune $10-y$.	**1p**
Astfel, la a 199-a mişcare, Matei scrie pe tablă numărul $4+10\cdot 200=2004$. Apoi, Paul va scrie numărul $2004+y$, $y\in \{1, 2, \ldots, 9\}$, iar Matei va aduna la acesta $10-y$ şi scrie pe tablă 2014.	**2p**
TOTAL	**7p**