OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA a VI a

Subiectul I

Unghiurile $\widehat{AOB}$ si $\widehat{AOC}$ sunt suplementare neadiacente. Dacă $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$ şi $m(\widehat{BOC}) = 40^o$, calculaţi măsura unghiului $\widehat{DOE}$, unde [OD este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ si [OE este semidreapta opusă semidreptei [OC.

Subiectul II

Se consideră şirul de numere : $a_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{19}, a_2 = \frac{12}{11} - \frac{20}{19}, a_3 = \frac{23}{11} - \frac{39}{19}, \dots$ Demonstraţi că $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{209}$ este un număr natural.

Subiectul III

Se consideră pătratul de dimensiune 3x3, în căsuţele căruia se află numărul 6. Se alege la întâmplare un pătrăţel şi se măreşte numărul din interiorul său cu 2, 3 sau 4, după câte pătrăţele vecine au o latură comună cu acesta şi se scade o unitate din numerele situate în pătrăţelele vecine. Acelaşi lucru se poate face şi micşorând numărul din pătrăţelul ales cu 2,3 sau 4 şi mărind cu o unitate toate numerele din pătrăţelele vecine, după modelul:

a	b	c		a-2	b+1	c		a+1	b	c		a	b-1	c
d	e	f	→	d+1	e	f	sau	d-3	e+1	f	sau	d-1	e+4	f-1
g	h	i		g	h	i		g+1	h	i		g	h-1	i

Toate transformările sunt posibile doar dacă păstrează în interiorul căsuţelor numere naturale.

a) Găsiţi un şir de transformări care aduc pătratul iniţial la forma

5	7	4
4	11	7
5	7	4

b) Demonstraţi că pătratul iniţial nu se poate aduce la forma

5	5	5
5	15	5
5	5	5

Subiectul IV

Se consideră numărul A format din n cifre de 1. Să se arate că A este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă n este divizibil cu 6.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

Bareme de corectare
CLASA a VI - a

Subiectul I

Unghiurile $\widehat{AOB}$ si $\widehat{AOC}$ sunt suplementare neadiacente. Dacă $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$ și $m(\widehat{BOC}) = 40^o$, calculaţi măsura unghiului $\widehat{DOE}$, unde [OD este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ si [OE este semidreapta opusă semidreptei [OC.

Barem:

Desenează corect unghiurile $\widehat{AOB}$ si $\widehat{AOC}$ neadiacente	1 p
$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) = 180^o$	1 p
$m(\widehat{AOB}) = 70^o$; $m(\widehat{AOC}) = 110^o$	2 p
[OD este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 35^o$.	1 p
[OE și [OC opuse $\Rightarrow m(\widehat{COE}) = 180^o$, deci $m(\widehat{AOE}) = 70^o$.	1 p
$m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{DOA}) + m(\widehat{AOE}) = 105^o$	1 p

Subiectul II

Se consideră şirul de numere : $a_1=\frac{1}{11}-\frac{1}{19}, a_2=\frac{12}{11}-\frac{20}{19}, a_3=\frac{23}{11}-\frac{39}{19}, \ldots$ Demonstraţi că $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{209}$ este un număr natural.

Barem1:

$a_1=\frac{1}{11}-\frac{1}{19}=\frac{1+0\cdot 11}{11}-\frac{1+0\cdot 19}{19}$	1 p
$a_2=\frac{12}{11}-\frac{20}{19}=\frac{1+1\cdot 11}{11}-\frac{1+1\cdot 19}{19}$ $a_3=\frac{23}{11}-\frac{39}{19}=\frac{1+2\cdot 11}{11}-\frac{1+2\cdot 19}{19}$	1 p
$a_{209}=\frac{1+208\cdot 11}{11}-\frac{1+208\cdot 19}{19}$	1 p
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{209}=\frac{209+\frac{208\cdot 209}{2}\cdot 11}{11}-\frac{209+\frac{208\cdot 209}{2}\cdot 19}{19}$	3 p
$=\frac{209}{11}-\frac{209}{19}=8\in\mathbb{N}$	1 p

Barem2:

$a_1=\frac{1}{11}-\frac{1}{19}=\frac{8}{209}$	1 p
$a_2=\frac{12}{11}-\frac{20}{19}=\frac{8}{209}$	1 p
$a_n=\frac{1+n\cdot 11}{11}-\frac{1+n\cdot 19}{19}$	3 p
$a_n=\frac{209n+19-209n-11}{209}=\frac{8}{209}$, pentru orice număr natural n	1p
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{209}=209\cdot\frac{8}{209}=8\in\ \mathbb{N}$	1 p

Subiectul III

Se consideră pătratul de dimensiune 3x3, în căsuţele căruia se află numărul 6. Se alege la întâmplare un pătrăţel şi se măreşte numărul din interiorul său cu 2, 3 sau 4, după câte pătrăţele vecine au o latură comună cu acesta şi se scade o unitate din numerele situate în pătrăţelele vecine. Acelaşi lucru se poate face şi micşorând numărul din pătrăţelul ales cu 2,3 sau 4 şi mărind cu o unitate toate numerele din pătrăţelele vecine, după modelul:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

→

a-2	b+1	c
d+1	e	f
g	h	i

sau

a+1	b	c
d-3	e+1	f
g+1	h	i

sau

a	b-1	c
d-1	e+4	f-1
g	h-1	i

Toate transformările sunt posibile doar dacă păstrează în interiorul căsuţelor numere naturale.

a) Găsiţi un şir de transformări care aduc pătratul iniţial la forma

5	7	4
4	11	7
5	7	4

b) Demonstraţi că pătratul iniţial nu se poate aduce la forma

5	5	5
5	15	5
5	5	5

Barem:

6	6	6
6	6	6
6	6	6

→

4	7	6
7	6	6
6	6	6

, sau orice alta transformare corecta — 1 p

4	7	6
7	6	6
6	6	6

→

4	8	4
7	6	7
6	6	6

→

4	8	4
8	6	7
4	7	6

4	8	4
8	6	8
4	8	4

→

4	7	4
7	10	7
4	7	4

→

5	7	4
4	11	7
5	7	4

— 2 p

Orice transformare pastreaza constanta suma elementelor tabelului(S=54) — 2 p

Cum, suma elementelor tabelului ce trebuie obtinut la punctul b) este 55, rezulta ca acesta nu poate fi obtinut. — 2p

Subiectul IV

Se consideră numărul A, format din n cifre de 1. Să se arate că A este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă n este divizibil cu 6.

Barem:

Numerele 1,11,111,1111,11111 nu sunt divizibile cu 7, verificare directă	1 p
111111:7=15873	1 p
Daca notăm $a = 111111$ şi $n = 6k$ atunci $A = a \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + ... + 10^{6\cdot(k-1)})$ şi cum 7 divide a obţinem că 7 divide A	3 p
Dacă $n = 6k + r$, şi $r \neq 0$ atunci $A = a \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + ... + 10^{6\cdot(k-1)}) \cdot 10^r + x$ unde x este format din r cifre de 1. Cum 7 divide pe a şi 7 nu divide pe x obţinem că în această situaţie 7 nu divide pe A	2p