OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA A- VIII -A

Subiectul I.

Se consideră mulţimea A = { x∈ R | $x = a + b\sqrt{5}$ $și$ $a, b \in Z, a^2 - 5b^2 = 1$}.
Demonstraţi că :

a) (9+4$\sqrt{5}$) ∈A
b) Dacă x,y ∈A, y=c + d$\sqrt{5}$, c,d ∈ Z atunci x•y ∈A
c) Dacă $\bar{x}$ = a − $b\sqrt{5}$ şi $\bar{y}$ =c−d$\sqrt{5}$, a, b, c, d ∈ Z atunci $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

Subiectul II.

a) Determinaţi valorile reale ale lui x şi y pentru care $x^4 + 16y^4 = 16xy - 8$
b) Fie n ∈ N*. Arătați că $\sqrt{9n^2 + 5n}$ este număr irațional.
c) Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Arătaţi că
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

Subiectul III.

Se consideră punctele A, B, C, D, necoplanare, astfel încât
$(AC) \equiv (AD) \equiv (BC) \equiv (BD)$ şi punctele E şi F mijloacele lui (AB) respectiv (CD).

a) Calculaţi măsura unghiului dreptelor AB şi CD.
b) Dacă $AA' \perp (BCD)$, demonstraţi că punctele B, A' şi F sunt coliniare.
c) Dacă G este piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACD$, arătaţi că $EG \parallel (BCD)$.

Subiectul IV.

Fie cubul ABCDEFGH, în care $BG \cap FC = \{P\}$ şi aria triunghiului DBP este egală cu 25$\sqrt{3}$ cm^2.
a) Calculați lungimea muchiei cubului.
b) Determinați tg u^0, unde u^0 este măsura unghiului dintre dreptele DP și EB.
c) Calculați valoarea unei funcții trigonometrice pentru măsura unghiului determinat de planele (EDG) și (EBG).

Nota:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect e notat de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare care conduce la soluţia problemei este acceptată.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA A- VIII – A

Subiectul I

a) Se ia a=9 şi b=4 ....1p

avem condiţia $a^2 - 5b^2 = 9^2 - 5\cdot 4^2 = 81 - 80 = 1$ deci $(9+4\sqrt{5}) \in A$....................................1p

b) Fie x= $a + b\sqrt{5}$ cu $a^2 - 5b^2 = 1$şi y=c + d$\sqrt{5}$ cu $c^2 - 5d^2 = 1$ 1p

din calcul x•y=(ac+5bd) +$\sqrt{5}$(ad+bc) verificăm dacă $(ac+5bd)^2 - 5(ad+bc)^2 = 1$................1p

din calcul $(ac+5bd)^2 - 5(ad+bc)^2 = a^2c^2 + 10abcd + 25b^2d^2 - 5a^2d^2 - 10abcd - 5b^2c^2 =$

$a^2c^2 - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 + 25b^2d^2 = c^2(a^2 - 5b^2) - 5d^2(a^2 - 5b^2) = (a^2 - 5b^2)(c^2 - 5d^2) = 1\cdot 1 = 1$ deci

x•y $\in$A...1p

c)

$\overline{x+y} = \overline{(a+c)+\sqrt{5}(b+d)} \overset{\text{def}}{=} (a+c) - \sqrt{5}(b+d)$, ...1p

iar $\bar{x}$ = a – $b\sqrt{5}$ şi $\bar{y}$ =c–d$\sqrt{5}$ de unde $\bar{x}+\bar{y}$=(a+c)–$\sqrt{5}$(b+d), deci $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$............1p

Subiectul II.

a) $x^4 + 16y^4 = 16xy - 8 \Leftrightarrow x^4 + 16y^4 - 16xy + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 + 8x^2y^2 - 16xy + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4y^2)^2 + 8(xy - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4y^2$ şi $xy = 1$…………………..1p

Cazul I $x = 2y \Rightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soluţiile ecuaţiei sunt perechile de numere reale :

$\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\sqrt{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$…………………………………………1p

Cazul II $x = -2y \Rightarrow -2y^2 = 1$

Ecuaţia nu are soluţii reale ………………………………………1p

b) Vom arăta că numărul $9n^2 + 5n$ nu este pătrat perfect.

$9n^2 < 9n^2 + 5n < 9n^2 + 6n + 1$…………………………………………..1p

$(3n)^2 < 9n^2 + 5n < (3n+1)^2$

Între două pătrate perfecte consecutive nu mai există un alt pătrat perfect.

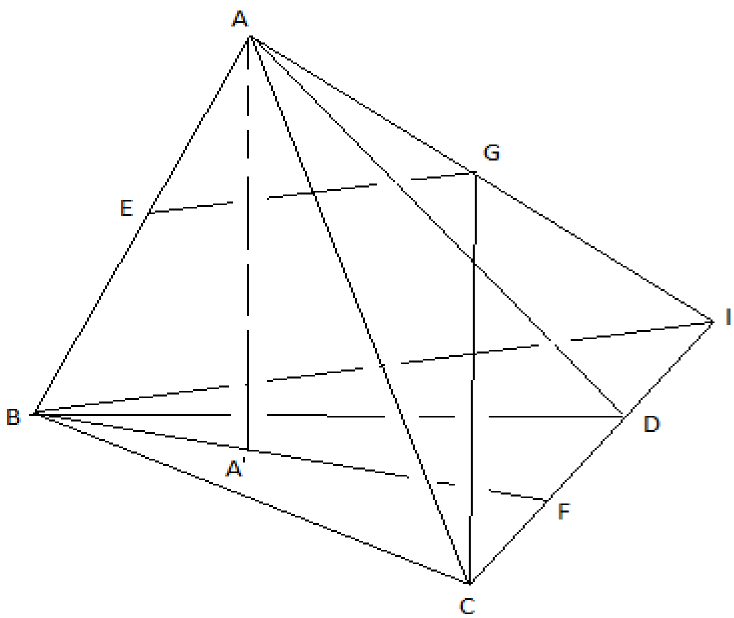
Deci, $\sqrt{9n^2 + 5n}$ este număr irațional………………………………………………..1p

c) $0 \le (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ 1p

$0 \le \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \Leftrightarrow ac + bc - ab \le \frac{5}{6} < 1$ Împărţind ambii membri ai inegalităţii

$ac + bc - ac < 1$ prin $abc > 0$ obţinem inegalitatea ceruta...1p

Subiectul III.



a) ΔABC este isoscel, CE mediană $\Rightarrow CE$ înălţime $\Rightarrow CE \perp AB$ 0,5p

ΔDAB este isoscel, DE mediană $\Rightarrow DE$ înălţime $\Rightarrow DE \perp AB$ 0,5p

$AB \perp CD, AB \perp DE \Rightarrow AB \perp (EDC)$.

$CD \subset (EDC) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow m < (AB, CD) = 90^\circ$ 1p

b) $AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD$. $AB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABA') \Rightarrow CD \perp BA'$ 1p

Deci BA' înălţime în ΔBCD. Dar ΔBCD este isoscel şi BF este mediană, deci înălţime, rezultă că B, A' şi F sunt coliniare...1p

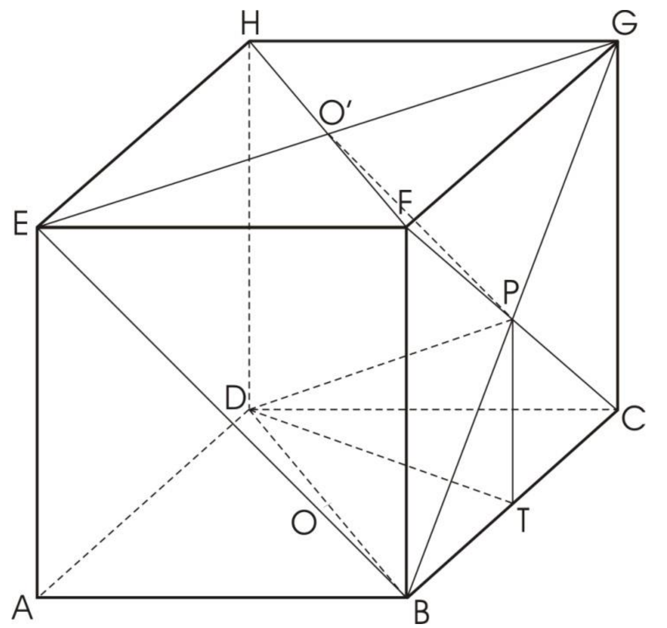
c) Fie G piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea unghiului $< ACD$ şi $\{I\} = CD \cap AG$.

ΔCAI este isoscel deoarece CG bisectoare şi înălţime, rezultă CG este mediană $\Rightarrow G$ este mijlocul lui AI 1p

E este mijlocul lui $(AB) \Rightarrow EG$ este linie mijlocie în $\Delta ABI \Rightarrow EG \parallel BI$ 1p

$BI \subset (BCD) \Rightarrow EG \parallel (BCD)$..1p

Subiectul IV.



a) Dacă notăm muchia cubului cu 2a obținem:
   BD = $2a\sqrt{2}$ **(**diagonală în pătratul ABCD);
   $BP = a\sqrt{2}$ (raza cercului circumscris pătratului FBCG)
   $DP = a\sqrt{6}$ (teorema lui Pitagora în $\Delta\, DPT$**,** unde T este mijlocul lui $[BC]$.
   Obținem $\Delta\, BPD$ dreptunghic în P (reciproca teoremei lui Pitagora)……..1p

Egalând aria: $5\sqrt{3} = \frac{BP \cdot DP}{2}$, obținem a = 5. Deci, muchia cubului are 10 cm……………1p

b) Dreptele DP și EB sunt necoplanare. Ducem prin P o paralelă la EB.

$[O'P]$ este linie mijlocie în $\Delta\, EGB$**,** O' este centrul pătratului EFGH.

$u^0 = m(\widehat{DP; EB}) = m(\widehat{DP; O'P}) = m(\widehat{DPO'})$ …………………………………………1p

$DP = 5\sqrt{6}$ cm; $O'P = 5\sqrt{2}$ cm; $DO' = 5\sqrt{6}$ cm……………………………………………..1p

Vom obține tg $u^0 = \sqrt{11}$…………………………………………………………………1p

c)(EDG) ∩ (EDB) = EG

$\Delta\, EBG$ echilateral ⟹ $BO' \perp EG$, $BO' = 5\sqrt{6}$ cm.

$\Delta\, EDG$ echilateral ⟹ $DO' \perp EG$, $DO' = 5\sqrt{6}$ cm.

$m[\widehat{(EDG);(EBG)}] = m(\widehat{DO'; BO'}) = m(\widehat{DO'B}) = a^0$…………………………………..1p

Obținem cos $a^0 = \frac{1}{3}$ sau sin$a^0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.   ……………………………………………………1p