

OLIMPIADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A VII-A

1.) Rezolvați pe mulțimea numerelor reale:

a.) $|9 - x^2| - |3 + x| = 0$

b.) $\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2$

2.) a.) Calculați: $\left[(\sqrt{2})^{-3} + 3\sqrt{2} \right] \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{18} \cdot \left(4\sqrt{32} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

b.) Determinați numerele naturale \overline{ab} astfel încât $\sqrt{a + \sqrt{ab}} = a$.

3.) Fie rombul $ABCD$. Pe laturile AB , respectiv AD considerăm punctele E și F astfel încât $AE = DF$. Dacă $BC \cap DE = \{P\}$, $CD \cap BF = \{Q\}$, atunci demonstrați că:

a.) $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = 1$,

b.) punctele Q , A și P sunt coliniare.

4.) În triunghiul ABC , AD este înălțime, iar punctele M , N și P sunt mijloacele laturilor AB , BC respectiv AC . Demonstrați că patrulaterul $MDNP$ sau $MNDP$ este trapez isoscel!

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

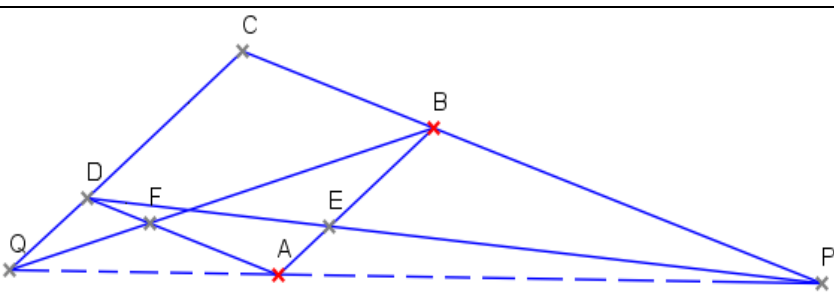
OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A VII-A

1.	Din oficiu	1p
a)	$ 9 - x^2 = (3+x)(3-x) = (3+x) \cdot (3-x) $	1p
	$ 9 - x^2 - (3+x) = (3+x) ((3-x) - 1) = 0$	1p
	De unde avem $ (3+x) = 0$ sau $ (3-x) = 1$	1p
	Din $ (3+x) = 0 \Rightarrow x = -3$	1p
	Din $ (3-x) = 1 \Rightarrow 3-x = \pm 1 \Rightarrow x = 3 \mp 1$ cu soluțiile $x = 2$ sau $x = 4$	1p
	Mulțimea soluțiilor ecuației $S = \{-3, 2, 4\}$	1p
b)	$x \geq 0, (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0$	2p
	$\sqrt{x} = 0$ sau $\sqrt{x} = 1$ de unde $x = 0$ sau $x = 1 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$	1p
2.	Din oficiu	1p
a)	$\left[\frac{\sqrt{2}}{4} + 3\sqrt{2} \right] \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} - 9\sqrt{2} \left(16\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$	1p
	$\frac{13\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} - 9\sqrt{2} \frac{31\sqrt{2}}{2} =$	1p
	$13 - 279 = -266$	1p
b)	Prin ridicarea la pătrat a relației, obținem $\sqrt{ab} = a(a-1)$	2p
	\overline{ab} pătrat perfect $\Rightarrow \overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ (1) și $\sqrt{ab} \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (2)	2p
	Din (1) $\Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $a-1 \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ și $a(a-1) \in \{0, 2, 6, 12, 30, 56\}$ (3)	1p
	Din (2) și (3) rezultă $a=3$ și soluția: $\overline{ab} = 36$	1p
3.	Din oficiu	1p
a)		1p
	$\Delta PDC : EB \parallel DC \stackrel{TFA}{\Rightarrow} \Delta PEB \sim \Delta PDC \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{EB}{DC}$ (1)	1p
	$\Delta QBC : FD \parallel BC \stackrel{TFA}{\Rightarrow} \Delta QFD \sim \Delta QBC \Rightarrow \frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC}$ (2)	1p
	$DC = BC = AD = AB$ $EB = AB - AE = AD - FD = AF$ (3)	1p

	$(1) + (2) \Rightarrow \frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = \frac{EB}{DC} + \frac{FD}{BC} = \frac{AF + FD}{BC} = \frac{AD}{BC} = 1$	2p
b)	$(2) \Rightarrow \frac{QF}{QB} = \frac{FD}{BC} \stackrel{ip}{=} \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{QF}{QB} = \frac{AE}{AB} \stackrel{rec.T.Th}{\Delta QAB} \Rightarrow FE \parallel AQ \quad (3)$	1p
	$(1) \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{EB}{DC} \stackrel{ip}{=} \frac{AF}{AD} \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{AF}{AD} \stackrel{rec.T.Th}{\Delta DAP} \Rightarrow FE \parallel AP \quad (4)$	1p
	$(3), (4) \Rightarrow A \in \overline{QP} \Leftrightarrow A-Q-P \text{ colin.}$	1p
4.	Din oficiu	1p
	Fie $m(B) > m(C)$. Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow MP \parallel DN$	2p
	Deoarece DM este mediană în triunghiul dreptunghic $\Rightarrow DM = AB/2$	2p
	Deoarece NP este linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow NP = AB/2$, deci $\Rightarrow DM = NP$	3p
	$\Rightarrow MDNP$ este trapez isoscel	1p
	Analog pentru $m(B) < m(C)$ obținem MNDP este trapez isoscel	1p