

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , CLASA a V - a

22 FEBRUARIE 2014

SUBIECTUL I

a). Pe un stadion intră la un meci un număr de persoane după următoarea regulă: în primul minut de la deschiderea stadionului, intră o persoană, în al doilea minut intră dublul numărului de persoane din primul minut plus încă o persoană, regula se menține, adică în minutul $k+1$ intră dublul numărului de persoane din minutul k plus încă o persoană, $k \geq 1$. Câte persoane au intrat după șapte minute?

b). Se dă șirul $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$. Arătați că dacă n este termenul de pe locul 201 al șirului atunci numărul $n+1$ este cub perfect.

SUBIECTUL II

- a) Împărțind numărul natural a la numărul natural b se obține câtul 14 și restul 18. Dacă diferența dintre numerele a și $a-3b$ este egală cu 135, arătați că numărul $2a$ este pătrat perfect. Gazeta matematica
- b) Câte numere de trei cifre împărțite la un număr natural b dau câtul 14 și restul 18..
Calculați suma lor.

SUBIECTUL III

Numărul natural \overline{abcd} are suma cifrelor egale cu 27. Arătați ca numărul $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 297. Gazeta matematica

SUBIECTUL IV

- a) Scrieți numărul 13^2 ca o sumă de două pătrate perfecte nenule.
- b) Arătați că numărul 13^{2014} poate fi scris ca o sumă de două pătrate perfecte.
- c) Dacă x, y, t sunt numere naturale nenule cu proprietatea $x^2 + y^2 = t^2$ atunci arătați că oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ există a și b numere naturale nenule, astfel încât $t^{2k+2} = a^2 + b^2$.

BAREM CLASA A V-A

SUBIECTUL I

- a) In primul minut o persoana
In al doilea minut $2 \cdot 1 + 1 = 3$ persoane
In al treilea minut $2 \cdot 3 + 1 = 7$ persoane
In al patrulea minut $2 \cdot 7 + 1 = 15$ persoane
In al cincilea minut $2 \cdot 15 + 1 = 31$ persoane
In al saselea minut $2 \cdot 31 + 1 = 63$ persoane
In al saptelea minut $2 \cdot 63 + 1 = 127$ persoane 2 puncte

Dupa sapte minute intra $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + 63 + 127 = 247$ persoane 1 punct

b) $t_1 = 1$

$$t_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$t_3 = 2 \cdot (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$t_4 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 1 punct$$

.....

$$t_{201} = 2^{200} + 2^{199} + \dots + 2 + 1 = n \quad \} 2 puncte$$

$$\text{Deci } n = 2^{201} - 1 \Rightarrow n + 1 = 2^{201}$$

$$n + 1 = (2^3)^{67} = (2^{67})^3 = \text{cub perfect} \quad \} 1 punct$$

SUBIECTUL II

$$a = b \cdot 14 + 18$$

$$a - 3b = b \cdot 11 + 18$$

$$a - (a - 3b) = b \cdot 14 + 18 - (b \cdot 11 + 18)$$

$$= 3b = 135$$

$$\Rightarrow b = 45 \quad \} 1 punct$$

$$a = b \cdot 14 + 18$$

$$= 45 \cdot 14 + 18 = 648 = 2^3 \cdot 3^4 \quad \} 1 punct$$

$$2a = 2^2 \cdot 3^4 = (2^2)^2 \cdot (3^2)^2 = p \cdot p \quad \} 1 punct$$

SUBIECTUL III

a) $a+b+c+d=27$

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001a + 110b + 110c + 1001d \quad (1) \quad \} \quad 2 \text{ punct}$$

$$b + c = 27 - (a + d) \quad \} \quad 1 \text{ punct}$$

si inlocuire in relatia (1) adica

$$\begin{aligned} \overline{abcd} + \overline{dcba} &= 1001(a+d) + 110[27-(a+d)] \\ &= 891(a+d) + 110 \cdot 27 \end{aligned} \quad \} \quad 2 \text{ puncte}$$

$$891=297 \cdot 3 \quad \vdots \quad 297$$

$$110 \cdot 27 \quad \vdots \quad 297 \quad \} \quad 1 \text{ punct}$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} + \overline{dcba} \quad \vdots \quad 297 \quad \} \quad 1 \text{ punct}$$

SUBIECTUL IV

a) $13^2=169=144+25=12^2 + 5^2 \quad \} \quad 1 \text{ punct}$

$$\begin{aligned} \text{b) } 13^{2014} &= 13^2 \cdot 13^{2012} = 13^2 \cdot (13^{1006})^2 = (12^2 + 5^2) \cdot (13^{1006})^2 \\ &= 12^2 \cdot (13^{1006})^2 + 5^2 \cdot (13^{1006})^2 \quad \} \quad 2 \text{ puncte} \\ &= (12 \cdot 13^{1006})^2 + (5 \cdot 13^{1006})^2 \\ &= a^2 + b^2 \quad \} \quad 1 \text{ punct} \end{aligned}$$

c) $t^{2k+2} = t^{2k} \cdot t^2 = t^{2k} \cdot (x^2 + y^2) \quad \} \quad 1 \text{ punct}$

$$\begin{aligned} &= t^{2k} \cdot x^2 + t^{2k} \cdot y^2 \\ &= (t^k \cdot x)^2 + (t^k \cdot y)^2 \end{aligned} \quad \} \quad 1 \text{ punct}$$

$$\begin{aligned} &= a^2 + b^2 \text{ unde } a=t^k \cdot x \\ &\quad \quad \quad b=t^k \cdot y \end{aligned} \quad \} \quad 1 \text{ punct}$$