INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ ,

CLASA a XII - a

22 FEBRUARIE 2014

1. Demonstrați că $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}$.

2. Calculați $\int \frac{\cos 2014x}{\sin x} dx$.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2014 elemente și cu proprietatea că $f: G \to G,\ f(x) = x^4$ morfism de grupuri. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = 5xy + 5(x+y) + 4,\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) $(\mathbb{R},*)$ este grup?

b) Calculați $(-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014$;

c) Determinați ultimele 2006 cifre ale numărului $1 * 2 * \dots * 2014$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 3 ore

BAREM XII

1. Demonstrați că $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}$.

Soluție. $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+(-x)^{2014}}}{2015^{-x}+1}\, dx +$

$+ \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1}\, dx = \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^{2014}}\, dx$……………………………….4 puncte

Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz $\Rightarrow \left(\int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}}\ dx\right)^2 \leq$

$\int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 (1+x^{2014}) dx\ = \frac{2016}{2015} \Rightarrow\ I \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}$……….………………..3 puncte

2. Calculați $\int \frac{\cos 2014x}{\sin x} dx$.

Soluție. Fie $F_n = \int \frac{\cos nx}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N}, x \in I \subset \mathbb{R} - \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

$F_{n+2} - F_n = \int \frac{\cos (n+2)x - \cos nx}{\sin x} dx = \int 2 \sin (n+1)x\, dx = \frac{2}{n+1} \cos (n+1)x + C$

……………………………………………………………………………… 4 puncte

$F_0 = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

$F_{2014} = \frac{2}{2013} \cos 2013x\ + \frac{2}{2011} \cos 2011x + \cdots + 2\cos x\ + \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

………………………………………………………………………………..3 puncte

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2014 elemente și cu proprietatea că $f: G \to G,\ f(x) = x^4$ este morfism de grupuri. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Soluție. $f: G \to G,\ f(x) = x^4$ este morfism de grupuri $\Longrightarrow$

$x^4 y^4 = (xy)^4 \Longrightarrow x^3 y^3 = (yx)^3, \forall\, x, y \in G$ …………………………..2 puncte

$y^4 x^4 = (yx)^4 = (yx)(yx)^3 = yxx^3y^3 = yx^4y^3 \Longrightarrow y^3x^4 = x^4y^3\ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^{12}y^{12} = x^8(x^4y^3)y^9 = x^8y^3x^4y^9 = x^4(x^4y^3)x^4y^9 = \cdots = y^{12}x^{12}$

……………………………………………………………………...…2 puncte

$(xy)^{12} = [(xy)^4]^3 = (x^4y^4)^3 \xRightarrow{x^3y^3=(yx)^3} y^{12}x^{12} = x^{12}y^{12}$

$(xy)^{2016} = ((xy)^{12})^{168} = (x^{12}y^{12})^{168} = x^{2016}y^{2016}$…………………2 puncte

Cum $|G| = 2014 \Rightarrow a^{2016} = a^2\ \forall a \in G \Rightarrow (xy)^2 = x^2y^2 \Rightarrow (G,\cdot)$ grup comutativ. ………………………………………………………………………..1 punct

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = 5xy + 5(x+y) + 4,\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) $(\mathbb{R}, *)$ este grup?

b) Calculați $(-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014$;

c) Determinați ultimele 2006 cifre ale numărului $1 * 2 * \dots * 2014$.

Solutie.

a) $x * y = 5(x+1)(y+1) - 1$ asociativă, comutativă, $e = -\frac{4}{5}$, $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
……………………………………………………………………………2 puncte

b) $x * (-1) = -1 \Longrightarrow (-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014 = -1$
……………………………………………………………………………2 puncte

c) $1 * 2 * \dots * 2014 = \underbrace{5^{2013} 2015!}_{\vdots 10^{2005}} - 1 \Longrightarrow 1 * 2 * \dots * 2014$ se termină în 2005 cifre de 9 precedate de cifra 4
…………………………………………………………………………...3 puncte