Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 1

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Se sapă o groapă cilindrică cu diametrul de 4m şi adâncă de 1,5m. Pământul scos se aşează la marginea gropii formând un inel cu secţiunea de formă de triunghi echilateral. Să se calculeze latura triunghiului ştiind că volumul pământului scos este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât volumul pământului compact.

2. Să se demonstreze că suma cuburilor a oricăre trei numere naturale consecutive se divide cu 9.

3. Să se demonstreze că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4. Să se demonstreze că $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}-\underbrace{33\ldots3}_{n}$ este pătrat perfect pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$!

5. În triunghiul ABC fie $B \in (AP), C \in (AQ)$ astfel încât $(BP) \equiv (CQ) \equiv (AB)$, iar ($BE$ şi (CF sunt bisectoarele triunghiului, cu $E \in (AC), F \in (AB)$. Să se demonstreze că $FE \parallel PQ$!

Bíró Zoltán

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Varianta 2

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 15 februarie 2014

1. Să se calculeze expresia: $\sqrt{\underbrace{\overline{44...4}}_{2n-ori}-\underbrace{\overline{88...8}}_{n-ori}}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare de gradul întâi.

a) Să se demonstreze că, dacă $f(1)\neq 0$, atunci $f\left(1+\dfrac{1}{f(1)}\right)\geq 2\sqrt{f(1)-f(0)}$

b) Dacă $f(0)=-2>-f(2)$ şi $f\left(1+\dfrac{1}{f(1)}\right)\leq 2\sqrt{f(1)-f(0)}$, determinaţi funcţia f !

3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ satisface relaţia $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{n}$ oricare ar fi numărul natural $n\geq 1$. Determinaţi termenii şirului!

4. În pătratul $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, M este mijlocul laturii BC, N un punct pe DC astfel încât $DN=\dfrac{1}{3}DC$, P este intersecţia dreptelor DM şi AN, iar Q intersecţia dreptelor AC şi DM.

a) Determinaţi vectorii $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ în funcţie de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$!

b) A câta parte este aria triunghiului APQ din aria pătratului?

5. Împărţim un pătrat în dreptunghiuri, prin drepte paralele cu laturile pătratului. Colorăm dreptunghiurile în alb şi negru, asemenea unei table de şah. Constatăm, că suma ariilor dreptunghiurilor negre este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor albe. Să se demonstreze că dreptunghiurile negre se pot aranja astfel încât să formeze un dreptunghi!