Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a

1. **a)** Demonstrați identitatea $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Determinați numerele $x_1,x_2,..,x_n\in(0,\infty)$, care verifică relația $(x_1+x_2+...+x_k)^2=x_1^3+x_2^3+...+x_k^3$, pentru orice $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

2. Fie triunghiul ABC şi G centrul de greutate. Fie $M\in(AB),N\in(BC),P\in(CA)$ astfel încât $\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PA}$. Notăm cu G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, respectiv CNP. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

3. **a)** Demonstrați că oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ și $t\in[0,1]$ are loc inegalitatea $|tx+(1-t)y|+|(1-t)x+ty|\le|x|+|y|$;

b) Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\le b\le c\le d$ și $b-a=d-c$. Atunci $|b|+|c|\le|a|+|d|$.

4. Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ cu proprietatea $xy,xz,yz\le 1$.

a) Determinați $m\in(0,\infty)$ maxim pentru care $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}\ge m(1+xy)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$ cu proprietatea $xy\le 1$;

b) Demonstrați inegalitatea $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{2+x^2+z^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}\ge\frac{3+xy+xz+yz}{2}$.

(Gazeta Matematică - 9/2013)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a - barem

1.	**a)**	Verificare prin inducție matematică.	**3p**
	b)	Se obțin valorile $x_k = k$, pentru $k \in \{1,2,..,n\}$.	**4p**

2.	Dacă notăm $k = \frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA}$, atunci pentru orice X din plan avem $\overrightarrow{XG_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XP}\right)$ $= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \frac{\overrightarrow{XA} + k\overrightarrow{XB}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{XC} + k\overrightarrow{XA}}{1+k}\right)$ și analoagele;	**4p**
	Prin însumare se obține $\overrightarrow{XG_1} + \overrightarrow{XG_2} + \overrightarrow{XG_3} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$, care conduce apoi la concluzie.	**3p**

3.	**a)**	Se aplică inegalitatea modulului;	**4p**
	b)	Ipoteza conduce la existența unui număr $t \in [0,1]$ astfel încât $b = ta + (1-t)d$ și $c = (1-t)a + td$. Apoi se aplică punctul precedent.	**3p**

4.	**a)**	Un caz particular conduce la concluzia $m \le \frac{1}{2}$.	**1p**
		Apoi se demonstrează că inegalitatea $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} \ge \frac{1}{2}(1+xy)$ este valabilă în ipotezele date. Deci $m = \frac{1}{2}$;	**3p**
	b)	Se aplică de trei ori punctul precedent.	**3p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro