Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VII-a

1. **a)** Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, respectiv invers proporționale cu $x,y,z \in \mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $b^2 = ac$, atunci $y^2 = xz$;

b) Fie numerele $a_1, a_2, a_3,...,a_{12} \in \mathbb{N}^*$ respectiv, invers proporționale cu $2,\ 2^2, 2^3,....,2^{12}$. Demonstrați că numărul $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{12}$ este cub perfect.

2. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$, $[AC] \equiv [AD]$ și $m(\sphericalangle BAC) \equiv m(\sphericalangle CAD) = 20^\circ$. Se consideră punctul $E \in (AC)$ astfel încât $DE \perp AC$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle EBC$.

3. În paralelogramul $ABCD$, M este mijlocul laturii $[DC]$, $BM \cap AD = \{N\}$, $CN \cap AB = \{P\}$, $BM \cap AC = \{T\}$.

a) Demonstrați că $BDNC$ și $BDCP$ sunt paralelograme;

b) Demonstrați că punctele D, T, P sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică, septembrie 2013

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Fie a,b doi divizori ai lui n pentru care $b > a$. Demonstrați că $b > a + \frac{a^2}{n}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VII-a - barem

1.	**a)**	Avem $ax = by = cz = k$, deci $y^2 = \frac{k^2}{b^2} = \frac{k^2}{ac} = \frac{k}{a} \cdot \frac{k}{c} = xz$.	**4p**
	b)	Avem $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, de unde $a_1a_2a_3 = a_2^3$. Se obține $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{12} = \left(a_2a_5a_8a_{11}\right)^3$ și concluzia.	**3p**

2.	Avem $\triangle ABC \equiv \triangle AED$ $(I.U.)$, de unde $[AB] \equiv [AE]$;	**3p**
	Triunghiul ABE este isoscel și $m(\sphericalangle ABE) = 80^\circ$;	**3p**
	Obținem $m(\sphericalangle EBC) = 10^\circ$	**1p**

3.	**a)**	$BDNC$ este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătățesc.	**2p**
		$BDCP$ este paralelogram deoarece are două laturi opuse paralele și congruente.	**2p**
	b)	Punctele D,T,P sunt coliniare deoarece T este centrul de greutatea la triunghiului ANP și PD este mediană.	**3p**

4.	Există numerele $k,l \in \mathbb{N}^*$, $k > l$ astfel încât $n = ak = bl$.	**1p**
	Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{n}{l} > \frac{n}{k} + \frac{n}{k^2}$, adică $\frac{1}{l} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$, echivalent cu $k^2 > kl + l$, echivalent cu $k(k-l) > l$ ceea ce este adevărat.	**6p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro