Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VIII-a

1. Fie $x,y,z \in \mathbb{Q}$, $x,y,z > 0$ astfel încât $xyz = 2$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{x}+y+z+2=\frac{(y+2)(z+2)}{2}$;

b) Demonstrați că numărul $\sqrt{2\left(\frac{1}{x}+y+z+2\right)\left(\frac{1}{y}+z+x+2\right)\left(\frac{1}{z}+x+y++2\right)}$ este rațional.

Supliment Gazeta Matematică, noiembrie 2013

2. Fie tetraedrul $ABCD$. Notăm cu P, Q și R, centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABD, respectiv ACD. Fie M un punct interior triunghiului BCD și notăm cu X, Y și Z simetricele sale față de punctele P, Q și, respectiv R.

a) Demonstrați că $(PQR)\|(BCD)$;

b) Demonstrați că $(XYZ)\|(BCD)$.

3. a) Să se demonstreze că $\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}$;

b) Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea
$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+...+\frac{x+2013}{2014}=\frac{4}{2x+2}+\frac{5}{2x+3}+...+\frac{2016}{2x+2014}$.

4. În paralelogramul $ABCD$ avem $BD \leq AC$. Se consideră punctele $M,N,P,Q \notin (ABC)$, de aceeași parte a planului (ABC) astfel încât MA, NB, PC, QD sunt perpendiculare pe planul (ABC), $MA \leq NB \leq QD \leq PC$, $[AC] \equiv [CP]$ și $[BN] \equiv [BD]$. Se știe că $MP \cap NQ \neq \varnothing$.

a) Demonstrați egalitatea $MA+PC=NB+QD$;

b) Demonstrați că $A_{MAC} \leq A_{QDB}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VIII-a - barem

1.	**a)**	Verificare	**3p**
	b)	Se obține $\sqrt{2\left(\frac{1}{x}+y+z+2\right)\left(\frac{1}{y}+z+x+2\right)\left(\frac{1}{z}+x+y++2\right)}=\frac{(x+2)(y+2)(z+2)}{2}\in\mathbb{Q}$.	**4p**

2.	**a)**	Se arată că dreptele PQ și PR sunt paralele cu planul (BCD);	**3p**
	b)	Se demonstrează că planul (XYZ) este paralel cu planul (PQR) și apoi se deduce concluzia.	**4p**

3.	**a)**	Prin transformări se ajunge la inegalitatea echivalentă $2(x^2-1)+(x-1)+3n(x-1)\geq 0$;	**4p**
	b)	Folosind punctul precedent deducem că unica soluție este $x=1$.	**3p**

4.	**a)**	Fie $MP\cap NQ=\{S\}$. Atunci trapezele dreptunghice $ACPM$ și $BDQN$ au aceeași linie mijlocie, de unde deducem egalitatea cerută;	**3p**
	b)	Avem $A_{MAC}=\frac{1}{2}MA\cdot AC=\frac{1}{2}MA\cdot PC$. Analog $A_{QDB}=\frac{1}{2}QD\cdot NB$. Inegalitatea este echivalentă cu $MA\cdot PC\leq NB\cdot QD$.	**2p**
		Fie $NB-MA=PC-QD\overset{notăm}{=}x$, atunci $MA\cdot PC\leq NB\cdot QD\Leftrightarrow MA\cdot(x+QD)\leq QD(x+MA)$ $\Leftrightarrow MA\leq QD$ ceea ce este adevărat.	**2p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.