Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]+[-x]$.

a) Determinaţi imaginea funcţiei f;

b) Fie numerele reale $x_1,x_2,...,x_{2014}$ cu proprietatea că $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{2014})=-2013$. Determinaţi cardinalul mulţimii $\mathbb{Z}\cap\{x_1,x_2,...,x_{2014}\}$.

2. Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de numere reale notăm cu $S_n=x_1+x_2+...+x_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică cu termenii pozitivi . Atunci $\dfrac{S_n}{n}\geq\sqrt{a_1a_n}$;

b) Fie $(b_n)_{n\geq1}$ o progresie geometrică cu $b_n\geq1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci , $\lg\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\geq\sqrt{\lg b_1\cdot\lg b_n}$.

3. a) Demonstrați că $(1+x)^n\geq1+nx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in(-1,\infty)$;

b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[4]{1+4x}+\sqrt[5]{1+5x}=4+4x$.

4. Fie a,b,c numere complexe distincte de același modul. Demonstrați că imaginile lor geometrice sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$.

Gazeta Matematică - 9/2013

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a X-a - barem

1.	**a)**	Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $f(x)=0$. Dacă $x \notin \mathbb{Z}$, atunci $f(x)=-1$ deci $\operatorname{Im} f=\{-1, 0\}$;	**4p**
	b)	Din punctul precedent se obține cardinal egal cu 1.	**3p**

2.	**a)**	Avem $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}$;	**3p**
	b)	Dacă $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică cu termeni strict pozitivi, atunci $(\lg b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică.	**1p**
		Din punctul precedent $\frac{\lg b_1+\lg b_2+\ldots+\lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$. Se aplică apoi inegalitatea mediilor.	**3p**

3.	**a)**	Se demonstrează prin inducție matematică; OBS: Nu se acordă punct pentru identificarea rezultatului ca fiind inegalitatea lui Bernoulli.	**3p**
	b)	Existența radicalilor conduce la restricția $x \geq -\frac{1}{4}$. Din punctul precedent avem $\sqrt[n]{1+nx} \leq 1+x$.	**1p**
		Scriem inegalitatea pentru $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ și le adunăm . Se obține $\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[4]{1+4x}+\sqrt[5]{1+5x} \leq 4+4x$. egalitatea este posibilî numai dacă $x=0$.	**3p**

4.	Avem $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.	**4p**
	În condițiile din ipoteză, triunghiul este echilateral dacă și numai dacă $a+b+c=0$.	**3p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro