Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

1. **a)** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Fie $B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați B^{300}.

2. Pentru un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definim șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relațiile $x_n=\min(a_n, a_{n+1})$ și $y_n=\max(a_n,a_{n+1})$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită, atunci și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limită;

b) Este reciproca adevărată?

Gazeta Matematică - 11/ 2013

3. **a)** Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $\det(A+xB)=\det(A)+(Tr(A)Tr(B)-Tr(AB))x+\det(B)x^2$, $\forall x\in\mathbb{C}$;

b) Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BA$ și $\det(A^2+B^2)=0$. Demonstrați că $Tr(A)Tr(B)=Tr(AB)$.

4. Fie $a,b\in(0,\infty)$ și definim șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectiv $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relațiile $x_1=a$, $y_1=b$ și $x_{n+1}=\dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că aceste șiruri sunt convergente și au aceeași limită;

b) Determinați limita acestor șiruri.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a - barem

1.	**a)**	Verificare	**4p**
	b)	Avem $B=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$ și se aplică punctul precedent.	**3p**

2.	**a)**	Este consecință a definiției limitei unui șir cu ajutorul vecinătăților;	**4p**
	b)	Reciproca poate fi falsă, de exemplu șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin relația $a_n=(-1)^n$.	**3p**

3.	**a)**	Verificare;	**3p**
	b)	$\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\det(A-iB)$, deci unul dintre $\det(A+iB)$ sau $\det(A-iB)$ este nul.	**2p**
		Concluzia se obține dacă dăm lui x valoarea i sau $-i$ în relația de la punctul precedent.	**2p**

4.	**a)**	Evident $x_2\le y_2$ și apoi se obține $x_2\le x_n\le y_n\le y_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.	**2p**
		Se deduce că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător, iar șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător și obținem convergența lor.	**2p**
		Din a doua relație de recurență obținem $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.	**1p**
	b)	Dar $x_{n+1}y_{n+1}=x_ny_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{ab}$.	**2p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.