INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
HUNEDOARA

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,\bullet)$ un grup. Pentru orice $x\in G$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $x^n=\underbrace{x\bullet x\bullet\ldots\bullet x}_{n \text{ ori } x}$.

a) Demonstrați că oricare ar fi $m,n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in G$ are loc egalitatea $x^m\bullet x^n=x^n\bullet x^m$;

b) Fie $x,y\in G$ cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n=y$. Demonstrați că $x\bullet y=y\bullet x$.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ și legea "$*$" definită pe $(0,2)$ prin relația $x*y=\frac{xy}{xy-x-y+2}$.

a) Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,2)$;

b) Determinați $u\in(0,2)$ pentru care $u*u*u=\frac{4}{3}$.

3. Fie $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Demonstrați că $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}$, pentru orice $n\ge 2$;

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

4. a) Fie $f:[0.1]\to[0,\infty)$ continuă, diferită de funcția nulă. Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx>0$.

b) Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm funcțiile continue $f_1,f_2,\ldots,f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $\int_0^1 f_k^2(x)dx=\frac{2k-1}{n}$, pentru orice $k\in\{1,2,3\ldots,n\}$. Demonstrați că există $\alpha\in[0,1]$ pentru care $f_1(\alpha)+f_2(\alpha)+\ldots.+f_n(\alpha)\le n$.

Supliment Gazeta Matematică, noiembrie 2013

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a - barem

1.	**a)**	Verificare pe baza asociativității;	**4p**
	b)	Verificare pe baza punctului precedent.	**3p**

2.	**a)**	Verificare;	**3p**
	b)	Funcția f este bijectivă, deci există $a \in (0,\infty)$ astfel încât $f(a) = u$.	**2p**
		Atunci $u * u * u = \frac{4}{3}$ conduce $f(a^3) = \frac{4}{3}$, de unde $a = \sqrt[3]{2}$ și $u = \frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}$.	**2p**

3.	**a)**	Verificare;	**2p**
	b)	Se aplică monotonia integralei și punctul precedent;	**3p**
	c)	Se aplică punctul precedent și criteriul cleștelui și obținem $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$	**2p**

4.	**a)**	Există cel puțin un punct $u \in [0,1]$ pentru care $f(u) > 0$. Atunci există cel puțin un interval $[a,b] \subset [0,1]$ pentru care $f(x) > 0$, pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci $\int_0^1 f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx > 0$.	**3p**
	b)	Presupunem contrariul. Atunci $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) > n$, pentru orice $x \in [0,1]$. Dar $n\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)^2 > n^2$, adică $\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x) > n$. Folosind punctul precedent se obține $\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k^2(x)dx > n$, care contrazice ipoteza deoarece $\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k^2(x)dx = n$.	**4p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro