OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
18 IANUARIE 2014

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a. Aflaţi numerele raţionale x şi y ştiind că

$$x\cdot\left(\sqrt{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{11}\right)^2}\right)+2\sqrt{5}+y=0 .$$

b. Aflaţi numerele $\overline{abcd}$ ştiind că $\sqrt{6\sqrt{\overline{abcd}}}\in\mathbb{N}$

Subiectul 2.

Se consideră $x_1,x_2,x_3,...,x_{2012}\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot...\cdot x_{2012}=1$ şi $S=x_1+x_2+x_3+...+x_{2012}$.

a. Arătaţi că S este un număr întreg divizibil cu 4.

b. Calculaţi produsul $P=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdot...\cdot\left(x_{2011}+\frac{1}{x_{2012}}\right)\cdot\left(x_{2012}+\frac{1}{x_1}\right)$

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie $E\in[AB]$, $F\in[BC]$, $AC\cap BD=\{O\}$, $OE\cap CD=\{G\}$, $OF\cap AD=\{H\}$, $AD\cap FG=\{M\}$, $BC\cap HE=\{N\}$ .Să se arate că:

a. Patrulaterul $HEFG$ este paralelogram.

b. Punctele M, O, N sunt coliniare.

Subiectul 4.

Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei $[AC]$. Paralela prin E la BD intersectează pe $[AB]$ în M. Demonstraţi că:

a) ΔAMC este isoscel;

b) $ME=\frac{BD}{2}$ şi că $CM=\frac{AB+CD}{2}$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ
str. Lt. Drăghiescu, Nr.4A
tel. 0233/214860,fax 0233/215807
e-mail: isj_neamt@yahoo.com

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
18 IANUARIE 2014

CLASA a VII-a
Bareme

Subiectul 1.

a. $\sqrt{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{11}\right)^2}=3\sqrt{5}-6$ … **1p.**

Relaţia devine: $(3x+2)\sqrt{5}-6x+y=0$ … **1p.**

x şi y sunt raţionale $\Rightarrow 3x+2=0$ şi $-6x+y=0$ … **1p.**

Finalizare $x=-\frac{2}{3}$ şi $y=-4$ … **1p.**

b. $\sqrt{6\sqrt{\overline{abcd}}}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{\overline{abcd}}=6k^2\Rightarrow\overline{abcd}=36k^4, k\in\mathbb{N}$ … **2p.**

Finalizare $\overline{abcd}\in\{2916, 9216\}$ … **1p.**

Subiectul 2.

a. $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2012}=1$ şi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012}\in\mathbb{Z}$ implică faptul că numerele sunt 1 sau –1, iar numărul numerelor care sunt –1 este par. … **1p.**

Dacă *m* este numărul numerelor de 1 din șir, iar *n* este numărul numerelor de –1 din șir, atunci $S=m\cdot 1+n\cdot(-1)=m-n=2012-2n=2012-4k$ (am notat $n=2k$) …**1p.**

Finalizare S este divizibil cu 4 …**1p.**

b. Dacă toate numerele sunt 1 sau toate sunt –1 atunci $P=2^{2012}$ …**2p.**

Dacă în şir sunt şi de 1 şi de –1 atunci paranteza formată dintr-un şi un –1 este 0, deci produsul va fi 0. …**2p.**

Subiectul 3.

a. $\Delta DOG\equiv\Delta BOE\Rightarrow[OG]\equiv[OE]$ şi $\Delta AOH\equiv\Delta COF\Rightarrow[OH]\equiv[OF]$

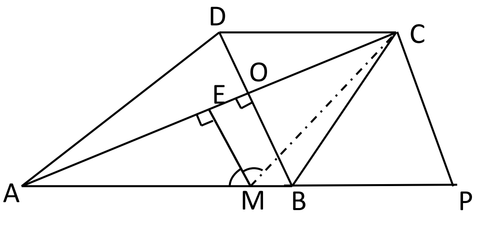
$\Rightarrow$ *HEFG* paralelogram …**3p.**

b. Justificarea faptului că *MHNF* este paralelogram …**2p.**

MN şi *HF* se intersectează în mijlocul [*MN*]

dar *O* este mijlocul [*MN*] $\Rightarrow$ punctele *M*, *O*, *N* sunt coliniare …**2p.**

Subiectul 4.



a. În ΔAMC, [*ME*] mediană, mediatoare şi înălţime $\Rightarrow$

$\Rightarrow\Delta AMC$ isoscel cu $[AM]\equiv[MC]$. … **2p.**

b. Construim prin C o paralelă la diagonala BD, ce intersectează AB în P.

EM linie mijlocie în triunghiul ACP $\Rightarrow EM=\frac{CP}{2}$. … **2p.**

DCPB paralelogram $\Rightarrow$ CP=BD, deci $EM=\frac{CP}{2}$.

Din DCPB paralelogram obţinem şi că DC=BP, deci AP=AB+DC.

Triunghiul ACP dreptunghic şi CM mediană $\Rightarrow CM=\frac{AP}{2}=\frac{AB+DC}{2}$ ….**3p.**