OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
18 IANUARIE 2014

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Dacă $x \in [-7;1]$ şi $y \in [-1;7]$, arătaţi că $x^2 + y^2 + 6(x - y) \in [-18;14]$

Subiectul 2.

Se consideră $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2012} \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{2012} = 1$ şi $S = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2012}$.

a. Arătaţi că S este un număr întreg divizibil cu 4.

b. Calculaţi produsul $P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot ... \cdot \left(x_{2011} + \frac{1}{x_{2012}}\right) \cdot \left(x_{2012} + \frac{1}{x_1}\right)$

Subiectul 3.

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, O este centrul feţei $CDD'C'$ iar M este mijlocul muchiei $B'C'$.

a. Aflaţi măsura unghiului dreptelor BO şi AD'.

b. Arătaţi că $(AO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAD$.

Subiectul 4.

Fie *SABCD* o piramidă patrulateră regulată. Punctele *M, N, P, Q* sunt pe segmentele [*SB*], [*SC*], [*SD*] respectiv [*SA*] astfel încât *SM=SN=SP=SQ*, iar R este simetricul lui *N* faţă de *AC*.

a. Demonstraţi că punctele *Q, O, R* sunt coliniare.

b. Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele *MP* şi *QR*.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ
str. Lt. Drăghiescu, Nr.4A
tel. 0233/214860,fax 0233/215807
e-mail: isj_neamt@yahoo.com

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
18 IANUARIE 2014
CLASA a VIII-a
Bareme

Subiectul 1.

$x^2+y^2+6(x-y)=(x+3)^2+(y-3)^2-18$ … **3p.**

$x\in[-7;1]\Rightarrow -7\le x\le 1\Rightarrow -4\le x+3\le 4\Rightarrow (x+3)^2\le 16$ … **1p.**

$y\in[-1;7]\Rightarrow -1\le y\le 7\Rightarrow -4\le y-3\le 4\Rightarrow (y-3)^2\le 16$ … **1p.**

$0\le (x+3)^2+(y-3)^2\le 32\Rightarrow -18\le (x+3)^2+(y-3)^2-18\le 14$ … **2p.**

Subiectul 2.

a. $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2012}=1$ şi $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2012}\in\mathbb{Z}$ implică faptul că numerele sunt 1 sau –1, iar numărul numerelor care sunt –1 este par. …**1p.**

Dacă *m* este numărul numerelor de 1 din şir, iar *n* este numărul numerelor de –1 din şir, atunci $S=m\cdot 1+n\cdot(-1)=m-n=2012-2n=2012-4k$ (am notat *n=2k*) …**1p.**

Finalizare S este divizibil cu 4 …**1p.**

b. Dacă toate numerele sunt 1 sau toate sunt –1 atunci P=2^{2012} …**2p.**

Dacă în şir sunt şi de 1 şi de –1 atunci paranteza formată dintr-un şi un –1 este 0, deci produsul va fi 0. …**2p.**

Subiectul 3.

a. $BC'\parallel AD'\Rightarrow m\sphericalangle(BO,AD')=m\sphericalangle(BO,BC')=m(\sphericalangle OBC')$ …**1p.**

BO este mediană în triunghiul echilateral *BDC'* deci $m(\sphericalangle OBC')=30^\circ$ …**1p.**

b. Lucrăm pe trapezul dreptunghic *DAMC'*

Demonstrarea faptului că ΔMOA dreptunghic (notăm cu *a* latura cubului şi prin calcule şi reciproca Teoremei lui Pitagora) …**2p.**

$tg(\sphericalangle MAO)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi $tg(\sphericalangle DAO)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …**2p.**

unghiurile sunt congruente, deci $(AO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAD$ …**1p.**

Subiectul 4.

a. $Q,N,R\in(SAC)$

R fiind simetricul ui N faţă de $AC\Rightarrow$ $\sphericalangle NOC\equiv\sphericalangle ROC$

Dar $\sphericalangle NOC\equiv\sphericalangle QOA$ de unde rezultă că $\sphericalangle QOA\equiv\sphericalangle ROC$.

Folosind şi faptul că *A, O, C* sunt coliniare şi reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf obţinem coliniaritatea punctelor *Q, O, R.* …**3p.**

b. $MP\parallel BD$ (reciproca T.Thales) …**1p.**

$BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp QR$ …**2p.**

Determinarea măsurii unghiului cerut … **1p.**