

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 14.02.2014
Clasa a V-a

1. Fie numerele $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 53 + 54$ și $y = 1 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{2014}$.

(3p) a) Determinați restul împărțirii numărului x la 2014.

(4p) b) Precizați câtul și restul împărțirii numărului y la 21.

Felicia Brodețchi

2. (7p) Trei copii cumpără pixuri, caiete și creioane, fiecare tip de obiect fiind de același fel, și plătesc astfel:

- primul, pentru 12 pixuri, 8 caiete, 8 creioane, 60 lei;

- al doilea, pentru 4 pixuri, 8 caiete, 2 creioane, 30 lei;

- al treilea, pentru 8 pixuri, 4 caiete și 6 creioane, 38 lei.

Determinați prețul fiecăruia dintre cele trei tipuri de obiecte cumpărate.

Liviu Cocariu-Ardelean

3. (4p) a) Arătați că numărul $A = 2007^{2014} + 2008^{2013} + 2009^{2012}$ nu este pătrat perfect.

(3p) b) Arătați că numărul $B = 2^{6n+7} - 2^{6n+5} + 2^{6n+2}$ se poate scrie ca suma a patru cuburi perfecte.

Maria Ghiță

4. (7p) Determinați mulțimea: $M = \overline{abc} \mid a \cdot \overline{bc}, b \cdot \overline{ac}$ sunt numere consecutive.

GM 3/2013

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 2 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a V-a, 2014

1. a) $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ (1p)

Se obține că $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 53 : 2014$ (1p)

Prin urmare, restul împărțirii numărului x la 2014 este 54(1p)

b) $y = 1 + 4^1 + 4^2 \cdot (4 + 4^2) + 4^5 \cdot (4 + 4^2) + \dots + 4^{2012} \cdot (4 + 4^2)$ (1p)

$y = 1 + 4^1 + 4^2 \cdot 21 + 4^5 \cdot 21 + \dots + 4^{2012} \cdot 21$ (1p)

$y = 5 + 21 \cdot (4^2 + 4^5 + \dots + 4^{2012})$ (1p)

Împărțind numărul y la 21 obținem câtul $4^2 + 4^5 + 4^8 + \dots + 4^{2012}$ și restul 5(1p)

2. *Metoda comparației*: prezentarea datelor sub forma schemei de mai jos (2p)

Primul copil 12 pixuri 8 caiete 8 creioane 60 lei

Al doilea copil 4 pixuri 8 caiete 2 creioane 30 lei

Al treilea copil 8 pixuri 4 caiete 6 creioane 38 lei

Adunând obiectele cumpărate de ultimii 2 copii obținem:

12 pixuri 12 caiete 8 creioane 68 lei(1p)

\Rightarrow 4 caiete costă 8 lei \Rightarrow 1 caiet costă 2 lei(1p)

Avem 12 pixuri 8 creioane $60 - 8 \cdot 2 = 44$ lei

4 pixuri 2 creioane $30 - 8 \cdot 2 = 14$ lei $| \cdot 4$ (1p)

\Rightarrow 16 pixuri 8 creioane 56 lei \Rightarrow 4 pixuri costă $56 - 44 = 12$ lei

\Rightarrow 1 pix costă 3 lei(1p)

\Rightarrow 1 creion costă 1 leu(1p)

3. a) $u(2007^{2014}) = 9$ (1p)

$u(2008^{2013}) = 8$ (1p)

$u(2009^{2012}) = 1$ (1p)

$u(A) = 8 \Rightarrow A$ nu este pătrat perfect(1p)

b) $B = 2^{6n} \cdot (2^7 - 2^5 + 2^2)$ (1p)

$B = 2^{6n} \cdot 100 = 2^{6n} \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$ (1p)

$B = (2^{2n})^3 + (2^{2n+1})^3 + (2^{2n} \cdot 3)^3 + (2^{2n+2})^3$ (1p)

4. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$, de unde obținem $c \cdot \overline{a-b} = 1$ (1p)

$\Rightarrow c = 1, b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, a = b + 1$ (1,5p)

Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$, de unde obținem $c \cdot \overline{b-a} = 1$ (1p)

$\Rightarrow c = 1, a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, b = a + 1$ (1,5p)

$M = 121, 211, 231, 321, 341, 431, 451, 541, 561, 651, 671, 761, 781, 871, 891, 981$..(2p)