Barem de corectare OLM Clasa a XI-a, 2014

1. $D = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{-4} \end{vmatrix} = \left(e^{x^2+x-2}\right)^2 + \dfrac{2}{e^{x^2+x-2}} - 3$ ....**(2p)**

Notăm $e^{x^2+x-2} = t, \quad t > 0$ ....**(1p)**

$D = \dfrac{(t-1)^2(t+2)}{t} \leq 0 \Leftrightarrow t = 1$ ....**(2p)**

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, -2\}$ ....**(2p)**

2. a) $x_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$ ....**(1p)**

$x_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$ ....**(1p)**

$x_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\sin 2x)}{x} = 2^2$ ....**(1p)**

b) Demonstrația prin inducție că

$x_n = 2^{n-1}, \forall n \in N^*$ ....**(2p)**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+2^{n-1}}{2^n} = 1$ ....**(2p)**

3. a) Fie $l \in \overline{R}$ limita șirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ sunt două subșiruri ale lui $(a_n)_{n\geq 0}$, ele vor avea aceeași limită

l ....**(2p)**

b) Enunțul reciprocei este:

”Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ au limită, atunci șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limită.”……………………….**(1p)**

Căutăm un contraexemplu care să dovedească faptul că reciproca este falsă.......................**(1p)**

$a_n = (-1)^n$ este divergent fără limită..**(1p)**

$x_n = \min\{(-1)^n, (-1)^{n+1}\} = -1$ are limită...**(1p)**

$y_n = \max\{(-1)^n, (-1)^{n+1}\} = 1$ are limită...**(1p)**

4. a) $X(z)\cdot X(\overline{z}) = I_2\left(1-|z|^2\cdot\det A\right) + A\left(z+\overline{z}+|z|^2\cdot tr(A)\right)$

Deci $n = 1-|z|^2\cdot\det A, \quad m = z+\overline{z}+|z|^2\cdot tr(A)$……………………………...………**(3p)**

b) $|z| = 1 \Rightarrow z+\overline{z} = 2\cos\alpha \in [-2,2]$ ....**(1p)**

$tr\left[X(z)\cdot X(\overline{z})\right] = tr(mA+nI_2) = a^2+d^2+2(\cos\alpha)(a+d)+2+2bc$ ………………………**(1p)**

$tr(A\pm I_2)^2 = a^2+d^2\pm 2(a+d)+2+2bc$ ……………………………………………………**(1p)**

Inegalitatea cerută este adevărată…………………………...…………………………**(1p)**