**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**FAZA LOCALĂ, 14.02.2014**
**Clasa a XII-a**

**1.** Fie mulțimea $A=[2,4]$, legea $x\circ y=\frac{3xy-5x-5y+10}{2xy-4x-4y+9}$ pe $A$ şi funcția $f:A\to R$ cu $f(x)=\frac{5-2x}{x-1}$. Ştiind că legea este bine definită:

**(2p) a)** Arătați că $\operatorname{Im} f=[-1,1]$ şi că $f(x\circ y)=f(x)f(y), \forall x,y\in A$.

**(5p) b)** Deduceți asociativitatea legii, elementul neutru, elementele simetrizabile şi calculați $\frac{11}{5}\circ\frac{17}{8}\circ\frac{23}{11}\circ...\circ\frac{6n+5}{3n+2}$, unde $n\in N, n\geq 2$.

*SGM10/2013*

**2. (4p) a)** Se consideră $f,g:I\to R$, $I\subseteq R$ interval, două funcții derivabile, cu derivate continue. Determinați $\int [f'(x)+f(x)g'(x)]\cdot e^{g(x)}dx$.

**(3p) b)** Folosind eventual punctul **a)**, calculați $\int\frac{x^2\ln x-\ln x+x}{x^2}\, e^{x+\frac{1}{x}}dx,\ x>0$.

*Petru Vlad*

**3.** Fie $(C^*,\cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule, $\varepsilon$ o rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$ şi $H=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$. Arătați că:

**(3p) a)** $H$ este subgrup al grupului $(C^*,\cdot)$.

**(4p) b)** Orice subgrup cu trei elemente al grupului $(C^*,\cdot)$ coincide cu $H$.

***

**4.** Se consideră şirul $I_n=\int_0^a \sin^n x\cos nx\,dx,\ n\in N^*$, unde $a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \forall k\in Z$.

**(4p) a)** Demonstrați că, pentru orice număr natural $n\geq 3$, este adevărată relația de recurență

$$4I_n+I_{n-2}=\frac{2}{n}\sin^n a\sin na+\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}a\cos(n-1)a.$$

**(3p) b)** Calculați $\lim_{n\to\infty} n(2^{\alpha+2}I_{n+1}+2^\alpha I_{n-1})$ unde $\alpha>0$.

*Livia Băcilă*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

**Barem de corectare OLM Clasa a XII-a, 2014**

**1. a)** Deoarece $f$ derivabilă, deci continuă, şi $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe

$(1,+\infty) \Rightarrow \operatorname{Im} f = [f(4), f(2)] = [-1,1]$ ..........................................................................**(1p)**

$f(x \circ y) = f(x) f(y) \quad \forall x, y \in A$..........................................................................**(1p)**

**b)** $f$ strict monotonă pe $A \Rightarrow f$ injectivă pe $A$..........................................................**(1p)**

Se arată că $f((x \circ y) \circ z) = f(x \circ (y \circ z))$ şi cum $f$ injectivă $\Rightarrow$ legea "$\circ$" asociativă.........**(1p)**

Se rezolvă ecuaţia $f(x \circ e) = f(x) \Rightarrow f(e) = 1 \Rightarrow e = 2 \in A$ elementul neutru.................... **(1p)**

Pentru a determina elementele simetrizabile rezolvăm ecuaţia $f(x \circ x') = f(e)$.

Pentru $x \neq \dfrac{5}{2} \Rightarrow f(x) \neq 0$ şi $f(x') = \dfrac{1}{f(x)} \in [-1,1] \Rightarrow x \in \{2,4\}$ care sunt singurele elemente

simetrizabile.................................................................................................................**(1p)**

$$f\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} = f\left(\frac{5n+6}{2n+3}\right)$$ şi atunci

$\dfrac{11}{5} \circ \dfrac{17}{8} \circ \dfrac{23}{11} \circ \ldots \circ \dfrac{6n+5}{3n+2} = \dfrac{5n+6}{2n+3}$ ..........................................................................**(1p)**

**2. a)** Funcţia $(f' + fg')e^g$ admite primitive fiind continuă..................................................**(1p)**

$\int (f'(x) + f(x)g'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = \int \left[ f(x) e^{g(x)} \right]' dx = f(x)\, e^{g(x)} + C$ ........................................**(3p)**

**b)** Pentru $f(x) = \ln x$ şi $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ se aplică a) ..........................................................**(2p)**

Obţinem $\displaystyle\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} e^{x+\frac{1}{x}} dx = \ln x \cdot e^{x+\frac{1}{x}} + C$ ..........................................................**(1p)**

**3. a)** Din tabla legii

| $\cdot$ | $1$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon^2$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon^2$ |
| $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon^2$ | $1$ |
| $\varepsilon^2$ | $\varepsilon^2$ | **1** | $\varepsilon$ |

rezultă că $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ şi că $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ adică $H$ subgrup...................**(3p)**

**b)** Fie $H' = \{1, a, b\}$ subgrup cu 3 elemente al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Dacă $a^2 = 1$, atunci $a = 1$ (fals) sau $a = -1$

Dacă $a = -1$ atunci $b^2 = 1$ sau $b^2 = -1$…………………………………………..…………**(1p)**

Dacă $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$ şi $H' = \{-1,1\}$ fals şi dacă $b^2 = -1$ atunci $H' = \{\pm 1, \pm i\}$ fals………**(1p)**

Prin urmare $a^2 \neq 1$. Însă $a^2 \neq a$, căci din $a^2 = a$ ar rezulta $a = 1$, fals…………….……….…**(1p)**

Rămâne că $b=a^2$ şi $a^3=1, a\neq 1$ adică $a=\varepsilon$ sau $a=\varepsilon^2$. În ambele cazuri, $H'=H$ …….**(1p)**

**4. a)** Considerăm şirul $J_n=\int_0^a \sin^n x \sin nx\,dx, \quad n\in N^*$.

Prin părţi obţinem $I_n=\frac{1}{n}\sin^n a\sin na-\int_0^a \sin^{n-1}x\cos x\sin nx\,dx$ (1)....................................**(1p)**

Adunând încă odată $I_n$ la (1) obţinem $2I_n=\frac{1}{n}\sin^n a\sin na-J_{n-1}$ (2)................................**(1p)**

Analog, $J_n=-\frac{1}{n}\sin^n a\cos na+\int_0^a \sin^{n-1}x\cos x\cos nx\,dx \Rightarrow 2J_n=-\frac{1}{n}\sin^n a\cos na+I_{n-1}$ (3)**(1p)**

Din (2) şi (3) obţinem $4I_n=\frac{2}{n}\sin^n a\sin na+\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}a\cos(n-1)a-I_{n-2}$ (4)...................**(1p)**

**b)** Deoarece $\sin a\in(-1,1)\Rightarrow \sin^n a\to 0$ .........................................................................**(1p)**

Din (4): $\lim_{n\to\infty} n\;\; 2^{\alpha+2}I_{n+1}+2^{\alpha}I_{n-1}\;\; =2^{\alpha}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\sin^{n+1}a\sin(n+1)a+\sin^n a\cos na\right)=0$ ........**(2p)**