

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a XI-a, 22 februarie 2014
CLASA a V-a

1. Un sportiv se antrenează urcând pe o scară în modul următor: el urcă 9 trepte, coboară 7 și urcă două, apoi repetă exercițiul. Considerând că inițial sportivul este pe treapta 0, aflați pe ce treaptă se află sportivul după 2014 mișcări (o mișcare fiind o coborâre sau o urcare a treptei).

Prof. Florin Smeureanu, Râmnicu-Vâlcea

2. a. Să se determine numerele naturale \overline{ab} care au proprietatea că:

$$\overline{ab} = a + b + a + b^2;$$

b. Să se determine numerele naturale \overline{ab} care au proprietatea că:

$$\overline{ab} = a + b + a + b^3.$$

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu
Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu-Vâlcea

3. a. Determinați cifrele impare diferite a, b, c astfel încât numărul $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ să fie pătrat perfect.

b. Demonstrați că suma resturilor la împărțirile cu a, b, c a numărului \overline{abc} nu poate fi egală cu 23.

Prof. Ion Gherghinaru, Râmnicu-Vâlcea
Prof. Liviu Vlădescu, Râmnicu-Vâlcea

4. a. Arătați că numărul $A = 1001^{2014}$ are cel puțin 6043 cifre.

b. Aflați ultimele 3 cifre ale numărului $A - 1$.

Prof. Simona Pozinărea, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a XI-a, 22 februarie 2014

CLASA a VI-a

1. a. Determinați numerele naturale n pentru care fracția

$$F_n = \frac{2014^n + 2015^n + 2016^n}{2011^n + 2012^n + 2013^n} \text{ este număr natural.}$$

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

b. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele naturale $4n + 7, 5n - 18, 6n + 37, 7n - 17$ și $8n + 5$ sunt simultan numere prime.

Prof. Dumitru Dobre, Râmnicu-Vâlcea

2. a. Demonstrați că $n = 2014^{2014} - 1$ este număr compus.

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

b. O persoană născută în secolul XX, va împlini x ani în anul x^2 . Ce vârstă ar împlini persoana respectivă în anul $44x + 35$?

Prof. Dumitru Dobre, Râmnicu-Vâlcea

3. Pe un cerc sunt așezate 2014 numere naturale nenule astfel încât suma oricăror 2012 numere alăturate (luate la rând) este aceeași.

a. Câte sume de 2012 numere alăturate se pot scrie?

b. Demonstrați că orice sumă de 2012 numere alăturate se divide cu 1006.

c. Demonstrați că suma celor 2014 numere se divide cu 1007.

Prof. Constantin Bărăscu, Râmnicu-Vâlcea

4. Pe laturile triunghiului $\triangle OAB$ cu $OA \equiv OB$, se iau punctele $C \in OA$ și $D \in OB$ astfel ca $AC \equiv BD$. Fie $FB \equiv AE$ cu $C \in FB$ și respectiv $D \in AE$, iar $FB \cap AE = I$. Demonstrați că:

a. $\angle OAD \equiv \angle OBC$;

b. OI este bisectoarea unghiului $\angle AOB$;

c. $\triangle FAO \equiv \triangle EBO$.

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a XI-a, 22 februarie 2014
CLASA a VII-a

1. a. Aflați restul împărțirii unui număr natural impar pătrat perfect, la 8.
b. Arătați că oricare ar fi numerele naturale k și n , numărul
 $x = 4k + 2^n + 2^{n+2}$ nu este pătrat perfect.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât:

$$\frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{a+3c} = \frac{3c}{a+2b}.$$

- a. Dați un exemplu de astfel de trei numere.

- b. Determinați numerele a, b, c astfel încât $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = 2014$.

Prof. Constantin Bărbăscu, Râmnicu-Vâlcea

3. Fie $ABCD$ un paralelogram cu unghiul A obtuz și P un punct situat pe diagonala BD . Dreapta AP intersectează dreptele CB și CD în punctele E , respectiv F .

- a. Dacă $BC = CE = ED$, calculați măsura unghiului $\angle EAB$.

- b. Dacă R este simetricul lui A față de BD , $AR \cap BD \neq P$, arătați că:

$$m \angle APR = m \angle AER + m \angle AFR.$$

Laurențiu Ploscaru, elev Râmnicu-Vâlcea

4. Fie paralelogramul $ABCD$, $m \angle BAD < 90^\circ$. Punctele M și Q se află pe semidreptele CB și respectiv CD astfel încât $\angle DAQ \equiv \angle DAC$, $\angle BAM \equiv \angle BAC$. Dacă $AQ = AM$, arătați că $CQ = CM$.

Prof. Daniela și Cătălin Stănică, Brăila

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a XI-a, 22 februarie 2014
CLASA a VIII-a

1. a. Aflați pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ numărul $2^{2013} + 2^{2010} + 2^n$ este pătrat perfect.

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

b. Demonstrați că printre oricare trei numere prime mai mari decât 3, există cel puțin două a căror sumă sau diferență este divizibilă cu 12.

Prof. Gheorghe Ciucă, Râmnicu-Vâlcea

2. Fie numerele reale x și y .

a. dacă $x + \sqrt{x^2 + 1} + y + \sqrt{y^2 + 1} = 1$ calculați $x + y$;

b. dacă $x + \sqrt{x^2 + 1} + y + \sqrt{y^2 + 1} = k$, unde $k > 0$, demonstrați că:

$$1 + k \cdot x + y = k - 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu-Vâlcea

Prof. Lucian Tuțescu, Craiova

3. Triunghiul ABC are $m \angle A = 90^\circ$, $m \angle B = 60^\circ$ și $BC = 24$ cm. În punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului, se ridică pe planul său perpendiculara MO .

a. aflați distanța de la punctul B la planul MAO ;

b. știind că $\operatorname{tg} \angle MAB$, $\angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{3}$, aflați lungimea segmentului MO ;

c. dacă $MO = 6\sqrt{2}$ cm, calculați distanța dintre dreptele AO și MP , unde P este mijlocul segmentului AC .

Prof. Leon Genoiu, Râmnicu-Vâlcea

4. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ în care $m \angle BAC = 90^\circ$, $m \angle ACB = 30^\circ$ și punctul I intersecția bisectoarelor în triunghiul ABC .

a. aflați măsura unghiului făcut de planele $B'BI$ și $A'AI$;

b. demonstrați că $S_{\Delta A'AI} = 15\sqrt{2} \text{ cm}^2 \Leftrightarrow S_{\Delta B'BI} = 30 \text{ cm}^2$.

Prof. Constantin Bărbăscu, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.