Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a V-a

1. 4 trepte avansează sportivul după efectuarea completă a unui exerciţiu.......................1p
18 mişcări face sportivul pentru efectuarea completă a unui exerciţiu.............................1p
$2014:18=111$ rest $16 \Rightarrow 111$ exerciţii complete efectuează sportivul............................2p
$4\cdot 111=444 \Rightarrow$ sportivul se află pe treapta cu numărul 444 după efectuarea exerciţiului cu numărul 111...2p
$444+9-7=446 \Rightarrow$ după efectuarea mişcării cu numărul 2014 sportivul se află pe treapta cu numărul 446...1p

----

Total = 7 puncte

2. a. $9a= \; a+b \;^2 \Rightarrow a\in \; 1,4,9$ ....2 p

$\overline{ab}\in \; 12,42,90$ ....3 p

b. $9a= \; a+b \;^3 \Rightarrow a=3$..1 p

$\overline{ab}=30$...1 p

Total = 7 puncte

3. a. $11 \; a+b+c \; = pp \Rightarrow a+b+c=11$..1 p

$a,b,c \; \in \; 1,3,7 \; , \; 1,7,3 \; , \; 3,1,7 \; , \; 3,7,1 \; , \; 7,3,1 \; , \; 7,1,3$ ....1 p

b. fie r_1,r_2,r_3 resturile împărţirilor la a,b respectiv c şi $s=r_1+r_2+r_3\leq 24$ .... 1 p

dacă una din cifrele a,b,c este mai mică decât 8, at $s\leq 8+8+6=22$ 1p

dacă $a=b=c=8$ sau $a=b=c=9$, at $s=0$ 1p

dacă două cifre sunt 8 şi una 9, at $s\in \; 9,11,15$ 1p

dacă două cifre sunt 9 şi una 8, at $s\in \; 19,21,22$ 1p

----

Total = 7 puncte

4. a. $1001^{2014}>1000^{2014}=10^{6042}$ ....2 p
10^{6042} are 6043 cifre $\Rightarrow 1001^{2014}$ are cel puţin 6043 cifre...2p
b. ultimele trei cifre ale lui A sunt ...$001 \Rightarrow A-1$ se termină în trei zerouri..................3p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a VI-a

1. a. $n=0 \Rightarrow F_0 = 1 \in \mathbb{N}$ 1p

dacă $n \geq 1$, at numitorul fracţiei este nr. par şi nu poate divide numărătorul fracţiei care este nr. impar..2p

b. suma celor 5 numere este $30n+14=$nr. par$\Rightarrow$ cel puţin unul dintre numere este nr. par, adică egal cu 2..2p

$4n+7, 6n+37, 8n+5$ sunt impare şi $7n-17 > 5n-18 \Rightarrow 5n-18=2$ 1p

obţinem $n=4$, iar numerele sunt 23,2, 61, 11, 37...1p

Total = 7 puncte

2. a. $u\ \ n\ = 5 \Rightarrow n \vdots 5$ şi cum $n > 5 \Rightarrow$ n este număr compus...2 p

b. $x^2 - x =$anul naşterii $\Rightarrow 1901 \leq x^2 - x \leq 2000$ ....1 p

$43 \cdot 44 < 1901 \leq\ \ x-1\ \ x \leq 2000 < 45 \cdot 46$ ....2 p

$x-1\ \ x = 44 \cdot 45 \Rightarrow x = 45$ 1p

în anul $44 \cdot 45 + 35 = 2015$ ar împlini 35 de ani...1p

Total = 7 puncte

3. a. fie numerele $x_1, x_2, ..., x_{2014}$ şi $S = x_1 + x_2 + ... + x_{2014}$, at

$s = S -\ \ x_1 + x_2\ \ = S -\ \ x_2 + x_3\ \ = S -\ \ x_3 + x_4\ \ = ... = S -\ \ x_{2013} + x_{2014}\ \ = S -\ \ x_{2014} + x_1$

sumele de 2012 numere alăturate$\Rightarrow$2014 sume…………………………………….......3 p

b. adunăm egalităţile $S =\ \ x_1 + x_2\ \ + s, S =\ \ x_2 + x_3\ \ + s, ..., S =\ \ x_{2014} + x_1\ \ + s$ şi obţinem

$1006S = 1007s$ ………………………………………………………………..……….. 2 p

$S = \dfrac{1007s}{1006} \in \mathbb{N}$, dar 1006 nu divide 1007$\Rightarrow 1006 \mid s$ ………………….........................1p

c. $s = \dfrac{1006S}{1007} \in \mathbb{N}$, dar 1007 nu divide 1006$\Rightarrow 1007 \mid S$ …...1p

----

Total = 7 puncte

4. a. $\Delta OAD \equiv \Delta OBC\ \ LUL\ \ \Rightarrow \measuredangle OAD \equiv \measuredangle OBC$ 2p

b. $\Delta ACI \equiv \Delta BDI\ \ ULU\ \ \Rightarrow \Delta OCI \equiv \Delta ODI\ \ LUL\ \ \Rightarrow \measuredangle IOC \equiv \measuredangle IOD$ 3p

c. $\Delta ACF \equiv \Delta BDE \Rightarrow AF = BE, \Delta OCF \equiv \Delta ODE \Rightarrow OF = OE$, deci

$\Delta FAO \equiv \Delta EBO\ \ LLL$ 2p

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a VII-a

1. a. $n=$nr impar$\Rightarrow n$ are una din formele $8k+1, 8k+3, 8k+5, 8k+7, k\in\mathbb{N}$ 1p

$n^2\in M_8+1\Rightarrow r=1$ 1p

b. $x=2^n\left[\ 2k+1\ ^n+4\right]$

$n=0\Rightarrow x=5\neq pp$**,** iar pt $n\geq 1\Rightarrow$ 2^n şi $2k+1\ ^n+4$ sunt prime între ele.................2p

$x=pp$ dacă cei doi factori sunt simultan pătrate perfecte, deci

$2^n=pp\Rightarrow n=2p, p\in\mathbb{N}^*$ 2p

pt $n=2p\Rightarrow$ $2k+1\ ^{2p}+4=M_8+1+4=M_8+5\neq pp$ 1p

----

Total = 7 puncte

2. a. $\dfrac{a}{2b+3c}=\dfrac{2b}{a+3c}=\dfrac{3c}{a+2b}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2b=3c$ ....2 p

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{2}=k\Rightarrow a=6k.b=3k, c=2k$, iar pt $k=1$ obţinem $a=6, b=3, c=2$ 2p

b. $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}=2014\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{1}{6k}+\dfrac{1}{3k}+\dfrac{1}{2k}}=2014\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2014^2}$ 2p

$a=\dfrac{6}{2014^2}, b=\dfrac{3}{2014^2}, c=\dfrac{2}{2014^2}$ ....1 p

----

Total = 7 puncte

3. a. $\Delta EDC isoscel\Rightarrow\measuredangle EDC\equiv\measuredangle ECD, dar \measuredangle ECD\equiv\measuredangle CBA\equiv\measuredangle ADC$

DF bisectoare în ΔADE isoscel$\Rightarrow DF$ înălţime$\Rightarrow DF\perp AE\Rightarrow AE\perp AB$……….3 p

b. ΔAPR isoscel $\Rightarrow AP=PR$

$DF\parallel AB\Rightarrow\dfrac{DP}{PB}=\dfrac{FP}{PA}, AD\parallel BE\Rightarrow\dfrac{DP}{PB}=\dfrac{AP}{PE}$ ……………………………………2p

$\dfrac{FP}{PR}=\dfrac{PR}{PE}, \measuredangle FPR\equiv\measuredangle EPR\Rightarrow\Delta FPR\sim\Delta EPR$ 1p

$\measuredangle PFR\equiv\measuredangle PRE\Rightarrow m\ \measuredangle APR\ =m\ \measuredangle PRE\ +m\ \measuredangle PER\ =m\ \measuredangle PFR\ +m\ \measuredangle PER$ 1p

----

Total = 7 puncte

4. fie $S\in\ CA$ astfel încât $AS=AM=AQ$ şi $A\in\ SC$ 2p

$\measuredangle MSA\equiv\measuredangle ACD\Rightarrow SM\parallel CQ, \measuredangle QSA\equiv\measuredangle ACB\Rightarrow QS\parallel CM\Rightarrow SQCM$ paralelogram......3p

fie T punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $SQCM\Rightarrow AT$ mediană în ΔAMQ isoscel$\Rightarrow$ AT mediatoare, deci $CM=CQ$ 2p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a VIII-a

1. a. $2^{2010} = \left(2^{1005}\right)^2, 2^{2013} \neq p^p \Rightarrow 2^{2013} = 2 \cdot 2^{1005} \cdot 2^{1007}$ 2p

$2^n = \left(2^{1007}\right)^2 \Rightarrow n = 2014$ 2p

b. numerele prime mai mari ca trei pot fi de forma: $12k+1, 12k+5, 12k+7, 12k+11$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ 2p

este evident că oricum alegem trei din cele patru forme există două a căror sumă sau diferenţă se divide cu 12...1p

----

Total = 7 puncte

2. a. $x+\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y$ 2p

analog $y+\sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x$ şi adunând cele două egalităţi obţinem $x+y=0$ 1p

b. $x+\sqrt{x^2+1} = k\left(\sqrt{y^2+1} - y\right)$, $y+\sqrt{y^2+1} = k\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ 2p

adunând cele două egalităţi se obţine relaţia cerută..2p

Total = 7 puncte

3. a. fie $BD \perp AO$, cum $BD \perp MO \Rightarrow BD \perp (MAO)$ ……………………………………..1p

$BD = 6\sqrt{3}$ cm…………………………………………………………………………....1p

b. fie $ON \perp AB \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow \measuredangle((MAB),(ABC)) = \measuredangle MNO$ ……………………….....1p

$\dfrac{MO}{NO} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MO = 6\sqrt{2}$ cm…………………………………………………………1p

c. se construieşte $PR \parallel AO, R \in (OC) \Rightarrow AO \parallel (MPR)$ …………………………………1p

fie $OT \perp PR \Rightarrow MT \perp PR$, fie OS înălţimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic $\Delta MOT \Rightarrow OS = d(O,(MPR)) = d(AO,(MPR)) = d(AO, MP)$ ………...1p

$OT =$ înălţime în ΔOPR echi $\Rightarrow OT = 3\sqrt{3}$ cm, $MT = 3\sqrt{11}$ cm $\Rightarrow OS = \dfrac{6\sqrt{66}}{11}$ cm......1p

----

Total = 7 puncte

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a VIII-a

4. a. fie $I^{'}$ punctul de intersecţie al bisectoarelor triunghiului $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$, cum $AI \perp II^{'}$ şi $BI \perp II^{'} \Rightarrow \measuredangle\left(A^{'}AI, B^{'}BI\right) = \measuredangle\left(AI, BI\right)$ 2p

$m\left(\measuredangle BAI\right) = 45^{0}, m\left(\measuredangle ABI\right) = 30^{0} \Rightarrow m\left(\measuredangle AIB\right) = 105^{0} \Rightarrow m\measuredangle\left(AI, BI\right) = 75^{0}$ 2p

b. fie R raza cercului circumscris triunghiului $AIB \Rightarrow m\left(BI\right) = 90^{0} \Rightarrow BI = l_4 = R\sqrt{2}$

$m\left(AI\right) = 60^{0} \Rightarrow AI = l_6 = R$ 2p

$\frac{S_{\Delta B^{'}BI}}{S_{\Delta A^{'}AI}} = \frac{BI}{AI} = \sqrt{2} \Leftrightarrow S_{\Delta B^{'}BI} = \sqrt{2} \cdot S_{\Delta A^{'}AI}$ 1p

----

Total = 7 puncte