MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1. a) Demonstrati ca pentru orice a,b,x,y strict pozitive avem

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

b) Fie $t\in[0,1]$. Demonstrati ca

$$\frac{t^2}{a^2-t^2}\leq\frac{t}{a^2-1}, a>1.$$

c) Fie x,y,z numere reale pozitive cu suma 1 si fie a real, $a>1$. Sa se arate ca

$$\frac{27}{9a^2-1}\leq\frac{1}{a^2-x^2}+\frac{1}{a^2-y^2}+\frac{1}{a^2-z^2}\leq\frac{3a^2-2}{a^2\left(a^2-1\right)}.$$

G.M.

PROBLEMA 2. Fie $a\in\mathbb{R}$ cu $0\leq a<1$. Demonstrati identitatea

$$\left[a\left(1+\left[\frac{1}{1-a}\right]\right)\right]+1=\left[\frac{1}{1-a}\right]$$

unde $[x]$ reprezinta partea intreaga a lui x.

PROBLEMA 3. Fie *ABCD* un patrulater convex, *O* punctul de intersecție al diagonalelor, *M* un punct de pe segmentul *AB* și *N* un punct de pe segmentul *CD*. Să se arate că *O, M, N* sunt coliniare dacă și numai dacă

$$AM\cdot DN\cdot OB\cdot OC=BM\cdot CN\cdot OA\cdot OD.$$

PROBLEMA 4. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm cu $f(n)$ numărul perechilor (x, y) cu x, $y\in\mathbb{Z}$ și $\left|x^2-y^2\right|=n$.

a) Calculați $f(2013)$.

b) Calculați $f(n)$ pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu puncte de la 0 la 7.