CLASA a IX-a

Subiectul 1

a) Putem scrie succesiv

$f(x)=(x-5)(x-19)(x-11)(x-13)+592=$

$=(x^2-24x+95)(x^2-24x+143)+592=$ ………1p

$=(x^2-24x+119-24)(x^2-24x+119+24)+592=$ 1p

$=[(x^2-24x+119)^2-24^2]+592=$ .. …….1p

$=[(x^2-24x+119)^2-576]+592=$

$=(x^2-24x+119)^2+16 > 0, \forall x\in R$ ……….1p

b) Minimul funcţiei f va fi 16 dacă ecuaţia $x^2-24x+119=0$ are rădăcini reale …1p

Se observă că $\Delta=100=10^2$ şi $x_1=7$; $x_2=17$ ………..1p

Aşadar, min $f=16$ şi el este atins pentru $x=7$ sau $x=17$ ………1p

Subiectul 2

Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem:

$\sum\frac{x^3}{y^2+z^2}=\sum\frac{(x^2)^2}{xy^2+xz^2}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2}=\frac{9}{\sum xy^2}$ …….1p

Este suficient de demonstrat că: $\sum xy^2\leq 6$

$\sum xy^2=xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2=x(3-x^2)+y(3-y^2)+z(3-z^2)$

……..3p

Demonstrăm că $x(3-x^2)\leq 2\overset{calcul}{\iff}x^3-3x+2\geq 0\overset{\text{descomp}}{\iff}$

$(x-1)(x^2+x-2)\geq 0\overset{descomp}{\iff}(x-1)^2(x-2)\geq 0(A)$ ...…….3p

Subiectul 3 Notăm $BC = a$; $AC = b$; $AC = c$ şi $B'C'=a'$; $A'C'=b'$; $A'B'=c'$

$$p=\frac{a+b+c}{2}\ ;\ p'=\frac{a'+b'+c'}{2}.$$

Cum $[B'C']$ este linie mijlocie în $\Delta ABC, p' = \frac{p}{2}$ …………1p

$$\frac{a}{2p} = \frac{a'}{2p'}; \frac{b}{2p} = \frac{b'}{2p'}; \frac{c}{2p} = \frac{c'}{2p'}$$ …………1p

În $\Delta ABC, I$ centrul cercului înscris şi P un punct oarecare, avem:

$$\overrightarrow{PI} = \frac{a}{2p}\overrightarrow{PA} + \frac{b}{2p}\overrightarrow{PB} + \frac{c}{2p}\overrightarrow{PC}$$ ……..……..1p

$$\overrightarrow{PI'} = \frac{a'}{2p'}\overrightarrow{PA'} + \frac{b'}{2p'}\overrightarrow{PB'} + \frac{c'}{2p'}\overrightarrow{PC'}$$ ....……...1p

$$\overrightarrow{II'}=\overrightarrow{PI'} - \overrightarrow{PI} = \frac{a}{2p}\overrightarrow{AA'} + \frac{b}{2p}\overrightarrow{BB'} + \frac{c}{2p}\overrightarrow{CC'}$$ 1p

Vom obţine: $\overrightarrow{IG} = \frac{a}{2p}\overrightarrow{AG} + \frac{b}{2p}\overrightarrow{BG} + \frac{c}{2p}\overrightarrow{CG}$ ……..……1p

Cum $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ obţinem

$$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{II'} \overset{prop}{\Longrightarrow} I, I', G$$ - coliniare. …………1p

Subiectul 4 $a_1 + a_k = a_1 \cdot a_k$ (1)

$k \to 2k - 1 => a_1 + a_{2k-1} = a_1 \cdot a_{2k-1}$ (2)

(1) Adunat cu (2) $2a_1 + a_k + a_{2k-1} = a_1(a_k + a_{2k-1})$

$a_1 + a_k + a_{2k-1} = a_1(a_k + a_{2k-1} - 1)$

Ip. $a_1 a_k a_{2k-1} = a_1(a_k + a_{2k-1} - 1)$ ……………3p

Cazul I: $a_1 \neq 0 => a_k + a_{2k-1} - 1 = a_k \cdot a_{2k-1} =>$

$=> (a_k - 1) = (a_{2k-1} - 1) = 0 =>$

$=>$ 1) $a_k = 1 => a_1 + 1 = a_1$ imposibil

2) $a_{2k-1} = 1 => a_1 + 1 = a_1$ imposibil …………..2p

Cazul II: $a_1 = 0 => a_{2k-1} = 0$ Toţi termenii progresiei sunt nuli …....2p