

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA, 22 februarie 2014**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**  
**CLASA a XI-a**

1. Fie  $n, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  și  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  astfel încât  $A^{k+1} = B^{k+1}$  și  $A^k B = B^k A$ .

Demonstrați că dacă matricea  $A^k + B^k$  este inversabilă atunci matricea  $A$  este inversabilă.

*Ion Bursuc și Daniela Macovei*

**Soluție.**

Dacă  $A^k + B^k$  este inversabilă, notând  $C = A^k + B^k$ , atunci avem  
 $A - B = I_n(A - B) = C^{-1}(A^k + B^k)(A - B) = C^{-1}(A^{k+1} - A^k B + B^k A - B^{k+1}) = O_n \Rightarrow A = B$

Rezultă că  $C = 2A^k$ , deci  $\det(C) = \det(2A^k) = 2^n (\det(A))^k$  și cum  $\det(C) \neq 0$ , deducem că  $\det(A) \neq 0$ , adică  $A$  este inversabilă.

**Barem.**

$(A^k + B^k)(A - B) = A^{k+1} - A^k B + B^k A - B^{k+1} = O_n$	2 p
Deduce $A = B$	2 p
$\det(C) = \det(2A^k) = 2^n (\det(A))^k$	2 p
Finalizare	1 p

2. Dacă  $A \in M_2(\mathbb{C})$  este matrice nesară, să se demonstreze că  $AB - BA \neq A^2$ ,  $\forall B \in M_2(\mathbb{C})$ .

*Dan Popescu*

**Soluție.**

Dacă există  $B \in M_2(\mathbb{C})$  astfel încât  $AB - BA = A^2$ , atunci  $B - A^{-1}BA = A$  și  
 $Tr(A) = Tr(B - A^{-1}BA) = Tr(B) - Tr(A^{-1}BA) = Tr(B) - Tr(B) = 0$ .

Cum  $A^2 - Tr(A)A + \det(A)I_2 = O_2$ , obținem  $A^2 = -dI_2$ , unde  $d = \det(A) \neq 0$ .  
 Atunci  $AB - BA = -dI_2$ , deci  $Tr(AB - BA) = -2d$ . Dar  $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ ,  
 adică  $d = 0$ , contradicție!

**Barem.**

$d = \det(A) \neq 0$	1 p
$Tr(A) = 0$	2 p
$A^2 = -dI_2 \Rightarrow Tr(A^2) = -2d$	1 p
$Tr(AB - BA) = 0$	2 p
Finalizare	1 p

3. Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale.

a) (4p) Să se arate că dacă șirul  $(x_n^2)_{n \geq 1}$  este convergent, atunci șirul  $(\cos x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

b) (3p) Să se arate că dacă  $x_n \in (-1, 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , iar șirurile  $(x_n^2)_{n \geq 1}$  și  $(\sin x_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente, atunci șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu

**Soluție.**

a) Dacă  $x_n^2 \rightarrow l$ , atunci  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l \geq 0$  și  $|x_n| \rightarrow \sqrt{l}$ . Sunt posibile două situații:

i) Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  are limită și atunci  $x_n \rightarrow \sqrt{l} \Rightarrow \cos x_n \rightarrow \cos \sqrt{l}$  sau

$x_n \rightarrow -\sqrt{l} \Rightarrow \cos x_n \rightarrow \cos(-\sqrt{l})$ , deci șirul  $(\cos x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

ii) Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  nu are limită. Atunci  $(x_n)_{n \geq 1}$  conține două subșiruri complementare  $(x_{k_n})_{n \geq 1}$  și

$(x_{p_n})_{n \geq 1}$  așa încât  $x_{k_n} \rightarrow \sqrt{l}$ ,  $x_{p_n} \rightarrow -\sqrt{l}$ ,  $l > 0$ . Obținem  $\cos(x_{k_n}) \rightarrow \cos \sqrt{l}$  și

$\cos(x_{p_n}) \rightarrow \cos(-\sqrt{l}) = \cos \sqrt{l}$  (funcția cosinus este pară), adică șirul  $(\cos x_n)_{n \geq 1}$  conține două subșiruri complementare cu aceeași limită deci este convergent.

b) Dacă  $x_n \in (-1, 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_n^2 \rightarrow l$ , atunci  $l \in [0, 1]$  și sunt posibile două situații:

i) Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  are limită și atunci  $x_n \rightarrow \sqrt{l}$  sau  $x_n \rightarrow -\sqrt{l}$ , deci  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

ii) Șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  nu are limită. Atunci  $(x_n)_{n \geq 1}$  conține două subșiruri complementare  $(x_{k_n})_{n \geq 1}$  și

$(x_{p_n})_{n \geq 1}$  așa încât  $x_{k_n} \rightarrow \sqrt{l}$ ,  $x_{p_n} \rightarrow -\sqrt{l}$ ,  $l \in (0, 1]$ . Obținem  $\sin(x_{k_n}) \rightarrow \sin \sqrt{l}$  și

$\sin(x_{p_n}) \rightarrow \sin(-\sqrt{l})$ .

Cum șirul  $(\sin x_n)_{n \geq 1}$  este convergent, orice două subșiruri ale sale vor avea aceeași limită

$\Rightarrow \sin \sqrt{l} = \sin(-\sqrt{l}) \Rightarrow \sin \sqrt{l} = -\sin \sqrt{l} \Rightarrow \sin \sqrt{l} = 0 \Rightarrow \sqrt{l} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  și cum

$l \in (0, 1] \Rightarrow l = 0$ , absurd!

**Barem.**

a) $ x_n  \rightarrow \sqrt{l}$	1 p
Tratează situația i)	1 p
Tratează situația ii)	2 p
b) Tratează situația i)	1 p
Tratează situația ii)	2 p

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ . Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+f(k)} = 0$ .

Dan Popescu

**Soluție.**

Din inegalitatea mediilor avem  $\frac{n+f(k)}{2} \geq \sqrt{n \cdot f(k)}$ , deci  $\frac{1}{n+f(k)} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(k)}}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Sumând aceste inegalități obținem  $0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+f(k)} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{f(k)}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  (1)

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{f(n+1)}} = 0$  și aplicând criteriul Stolz-Cesaro avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{f(k)}}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{f(n+1)}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{f(n+1)}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{f(n+1)}} \right) = 0.$$

Din relația (1), conform teoremei cleștelui, deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+f(k)} = 0$ .

**Barem.**

$0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+f(k)} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{f(k)}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{f(n+1)}} = 0$	1 p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{f(k)}}}{2\sqrt{n}} = 0$	2 p
Finalizare	1 p