

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Comparați fracțiile $f_1 = \frac{a+125^{725}}{a+625^{544}}$ și $f_2 = \frac{b+121^{1007}}{b+343^{671}}$, unde a și b sunt numere naturale.

Soluție: $f_1 = \frac{a+125^{725}}{a+625^{544}} = \frac{a+(5^3)^{725}}{a+(5^4)^{544}} = \frac{a+5^{2175}}{a+5^{2176}}$

– deoarece $5^{2175} < 5^{2176}$, obținem că $a+5^{2175} < a+5^{2176}$, deci $f_1 < 1$.

$$f_2 = \frac{b+121^{1007}}{b+343^{671}} = \frac{b+(11^2)^{1007}}{b+(7^3)^{671}} = \frac{b+11^{2014}}{b+7^{2013}}$$

– deoarece $11^{2014} > 7^{2013}$, obținem că $b+11^{2014} > b+7^{2013}$, deci $f_2 > 1$.

Din $f_1 < 1$ și deci $f_2 > 1$ deducem că $f_1 < f_2$.

Barem:

$f_1 = \frac{a+125^{725}}{a+625^{544}} = \frac{a+(5^3)^{725}}{a+(5^4)^{544}} = \frac{a+5^{2175}}{a+5^{2176}}$	2p
– deoarece $5^{2175} < 5^{2176}$, obținem că $a+5^{2175} < a+5^{2176}$, deci $f_1 < 1$	1p
$f_2 = \frac{b+121^{1007}}{b+343^{671}} = \frac{b+(11^2)^{1007}}{b+(7^3)^{671}} = \frac{b+11^{2014}}{b+7^{2013}}$	2p
– deoarece $11^{2014} > 7^{2013}$, obținem că $b+11^{2014} > b+7^{2013}$, deci $f_2 > 1$	1p
Finalizare: $f_1 < f_2$.	1p

2. Fie $a = \frac{7}{2x+3y}$, $b = \frac{2x+3y}{3x+1}$, $c = \frac{3x+1}{7}$, $d = \frac{25}{(x+2)^2 + (2y+1)^2}$, unde $x, y \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că $a, b,$

c sunt simultan naturale dacă și numai dacă d este număr natural.

Soluție: „ \Rightarrow ”: $a \cdot b \cdot c = 1$, dar $a, b, c \in \mathbf{N}$, deci $a = b = c = 1$; $c = \frac{3x+1}{7} = 1 \Rightarrow x = 2$; $a = \frac{7}{2x+3y} = 1 \Rightarrow$

$y = 1$; se obține $d = 1$, deci $d \in \mathbf{N}$.

„ \Leftarrow ”: $d \in \mathbf{N} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in D_{25} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in \{1, 5, 25\}$; dacă $x, y \in \mathbf{N}^*$, atunci $x+2 \geq 3$ și $2y+1 \geq 3$, adică $(x+2)^2 \geq 9$ și $(2y+1)^2 \geq 9$; obținem $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \geq 18$, deci $(x+2)^2 + (2y+1)^2 = 25$; $25 = 16 + 9$, de unde $x = 2$ și $y = 1$; se obține $a = b = c = 1$, deci $a, b, c \in \mathbf{N}$.

Barem:

„ \Rightarrow ”: $a \cdot b \cdot c = 1$, dar $a, b, c \in \mathbf{N}$, deci $a = b = c = 1$	1p
$c = \frac{3x+1}{7} = 1 \Rightarrow x = 2$; $a = \frac{7}{2x+3y} = 1 \Rightarrow y = 1$	1p
$d = 1$, deci $d \in \mathbf{N}$	1p
„ \Leftarrow ”: $d \in \mathbf{N} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in D_{25} \Rightarrow (x+2)^2 + (2y+1)^2 \in \{1, 5, 25\}$	1p
$x, y \in \mathbf{N}^*$, deci $x+2 \geq 3$ și $2y+1 \geq 3$, adică $(x+2)^2 \geq 9$ și $(2y+1)^2 \geq 9$; obținem $(x+2)^2 + (2y+1)^2 \geq 18$, deci $(x+2)^2 + (2y+1)^2 = 25$	1p

- se obține $x = 2$ și $y = 1$	1p
$a = b = c = 1$, deci $a, b, c \in \mathbb{N}$	1p

3. Pe laturile (OX și (OY ale unghiului ascuțit $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele B, respectiv D, astfel încât $(OB) \equiv (OD)$. Fie $A \in (OB)$ astfel încât AB este un sfert din OB și $C \in (OD)$ astfel încât OC reprezintă 75% din OD. Dacă $BC \cap AD = \{E\}$, arătați că:

- a) (3p) $(BC) \equiv (AD)$;
b) (2p) $\triangle BCD \equiv \triangle DAB$;
c) (2p) semidreapta (OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$.

Prof. Mariana Nicuță, Rădăuți

Soluție: $AB = \frac{1}{4} OB$; $OC = 75\% OD = \frac{3}{4} OD \Rightarrow CD = \frac{1}{4} OD$; deoarece $(OB) \equiv (OD) \Rightarrow$

$(AB) \equiv (CD)$ și $(OA) \equiv (OC)$.

a) $(OB) \equiv (OD)$ (din ip.), $(OC) \equiv (OA)$ și $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle DOA$ (\sphericalangle comun) $\Rightarrow \triangle BCO \equiv \triangle DAO$ (LUL), de unde obținem: $(BC) \equiv (AD)$; $\sphericalangle BCO \equiv \sphericalangle DAO$; $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$.

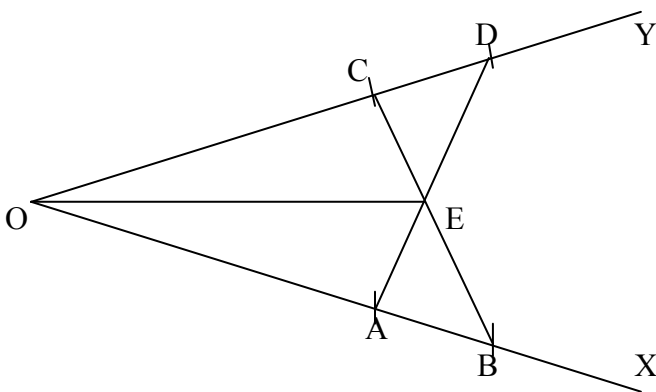
b) $(CD) \equiv (AB)$, $(BC) \equiv (AD)$ și $(BD) \equiv (BD) \Rightarrow \triangle BCD \equiv \triangle DAB$ (LLL).

c) $(AB) \equiv (CD)$, $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ECD$ și $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \triangle EAB \equiv \triangle ECD$ (LUV), de unde obținem $(EA) \equiv (EC)$.

$(OA) \equiv (OC)$, $(EA) \equiv (EC)$ și $(OE) \equiv (OE) \Rightarrow \triangle EOA \equiv \triangle EOC$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle EOC$.

Barem:

a) Desen	1p
- dem. că $(AB) \equiv (CD)$ și $(OA) \equiv (OC)$.	1p
- dem. că $\triangle BCO \equiv \triangle DAO \Rightarrow (BC) \equiv (AD)$	1p
b) - dem. că $\triangle BCD \equiv \triangle DAB$	2p
c) - dem. că $\triangle EAB \equiv \triangle ECD \Rightarrow (EA) \equiv (EC)$	1p
- dem. că $\triangle EOA \equiv \triangle EOC \Rightarrow \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle EOC$	1p



Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.