OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1.

a) $(a+b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)=x^2+y^2+\frac{a}{b}y^2+\frac{b}{a}x^2\geq(x+y)^2$ (1p)

b) Inegalitatea este echivalenta cu $t(t-1)(t+a^2)\leq 0$ adevarata (2p)

c) Pentru inegalitatea din stanga avem folosind a)

$$\sum\frac{1}{a^2-x^2}\geq\frac{9}{3a^2-(x^2+y^2+z^2)}\geq\frac{9}{3a-\frac{1}{3}}=\frac{27}{9a^2-1}$$

Am folosit $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}$ (2p) . Inegalitatea din dreapta ,dupa efectuarea unor calcule , este echivalenta cu $\sum\frac{x^2}{a^2-x^2}\leq\frac{1}{a^2-1}$ (1)

Luam in b) t=x,y,z adunam cele trei inegalitati si folosind conditia x+y+z=1 rezulta inegalitatea de demonstrat.(2p)

PROBLEMA 2.

Exista $k\in\mathbb{N}^*$ astfel incat $\left[\frac{1}{1-a}\right]=k$ deci $k\leq\frac{1}{1-a}<k+1$ de unde obtinem $a\in\left[\frac{k-1}{k},\frac{k}{k+1}\right)$, (1) Membrul stang al inegalitatii

$M_s=[a(1+k)]+1=k-1+1=k$ deoarece $(1+k)a\in\left[k-\frac{1}{k},k\right)$.

PROBLEMA 3.

Notam $\frac{AM}{BM}=a;\frac{DN}{CN}=b;\frac{OB}{OD}=c;\frac{OC}{OA}=d$ .Atunci avem

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+a}\overrightarrow{OA}+\frac{a}{1+a}\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{1+b}\overrightarrow{OD}+\frac{b}{1+b}\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{c}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}=-d\overrightarrow{OA} \qquad (4p)$$
$$\overrightarrow{ON}=-\frac{bd}{1+b}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{c(1+b)}\overrightarrow{OB}$$

Punctele O,M,N sunt coliniare

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ coliniar cu } \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{1+a}}{-\frac{bd}{1+b}}=\frac{\frac{a}{1+a}}{-\frac{1}{c(1+b)}} \Leftrightarrow abcd=1$$

$\Leftrightarrow AM\cdot DN\cdot OB\cdot OC=BM\cdot CN\cdot OA\cdot OD$

Ceea ce trebuia demonstrate. (3p)

PROBLEMA 4.

Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ notam cu S(a,b) sistemul $\begin{cases}x-y=a\\x+y=b\end{cases}$ .Afirmam ca:

(i) S(a,b) are solutie unica $\Leftrightarrow$ a si b au aceiasi paritate.
(ii)S(a,b) nu are solutii $\Leftrightarrow$ a si b au paritati diferite.
(iii)S(a,b) si S(c,d) au acceeasi solutie $\Leftrightarrow$ a=c si b=d.

$$\left|x^2-y^2\right|=n\Leftrightarrow|x-y|\cdot|x+y|=n\Leftrightarrow\begin{cases}|x-y|=d\\|x+y|=d`\end{cases}$$

unde dd`=n.Solutiile sistemului de mai sus se obtin prin rezolvarea sistemelor S(d,d`) ,S(-d,d`),S(d,-d`),S(-d,-d`).Numarul tuturor acestor sisteme este $4\tau(n)$,unde $\tau(n)$ reprezinta numarul divizorilor lui n.

Potrivit afirmatiilor de mai sus aceste sisteme vor furniza cate o solutie doar daca d si d` au aceiasi paritate.Avem trei situatii:

- n=4k+2$\Leftrightarrow$ oricare d si d` au paritati diferite,deci f(n)=0
- n=impar$\Leftrightarrow$ oricare d si d` sunt impare,deci f(n)=4$\tau(n)$.
- n=4k$\Rightarrow$d si d` sunt pare,d=2s si d`=2s` ,deci $\frac{n}{4}=ss`$de unde f(n)=4 $f\left(\frac{n}{4}\right)$.

Obs.Daca $n=p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_q^{l_q}$ atunci $\tau(n)=(l_1+1)(l_2+1)\ldots(l_q+1)$.

Deoarece 2013este impar si are descompunerea 2013=$3\cdot 11\cdot 61$atunci avem f(2013)=4$\tau(2013)$=32.(Se acorda 3p pentru calculul corect al lui f(2013)