

## BAREM CLASA a X-a

### Problema 1.

$$f(2014) = 2014 \Rightarrow \frac{a_1^{2014} + a_2^{2014} + \dots + a_{2014}^{2014}}{2014} = 1(1p)$$

$$f(-2014) = 2014 \Rightarrow \frac{2014}{\frac{1}{a_1^{2014}} + \frac{1}{a_2^{2014}} + \dots + \frac{1}{a_{2014}^{2014}}} = 1(1p)$$

Deoarece media aritmetica a unor numere este egala cu media lor armonica

$\Leftrightarrow$  numerele sunt egale, deduce ca

$$a_1^{2014} = a_2^{2014} = \dots = a_{2014}^{2014} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{2014} = a(\text{notatie}) (3p)$$

Atunci  $f(x) = 2014 \cdot a^x$  iar din  $f(2014) = 2014$  rezulta  $a^{2014} = 1 \Rightarrow a = 1$  si in concluzie  $f(x) = 2014$ , deci constanta.

### Problema 2.

a) Evident (1p)

b) Avem  $b + 4 \geq 4\sqrt{b}$  (din a)), iar de aici  $\frac{4b}{4+b} \leq \sqrt{b}$  care prin logaritmare in baza

$a \in (0, 1)$  obtinem  $\log_a \frac{4b}{4+b} \geq \log_a \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_a b$ . Analog obtinem inca doua

inegalitati, iar prin adunare rezulta  $M_s \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b c + \log_c a) \geq \frac{3}{2}$  unde am

folosit inegalitatea mediilor. (6p)

### Problema 3.

a) Din  $w \in A$  avem  $w = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$ . Atunci

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3 - w| + |w| &= |(1 - \alpha_1)z_1 + (1 - \alpha_2)z_2 + (1 - \alpha_3)z_3| + |\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3| \leq \\ \sum (1 - \alpha_i) |z_i| + \sum \alpha_i |z_i| &= |z_1| + |z_2| + |z_3|. \end{aligned} \quad (3p)$$

b) Analog cu punctul a). (4p)

### Problema 4.

a) Punctele A, B, C, D de afixe a, b, c, d se afla pe un cerc de centru O si de raza

r. Fie M si N punctele de afixe  $a+b$  si  $c+d$ . Din  $\frac{(a+b) + (c+d)}{2} = 0$  rezulta ca

O este mijlocul segmentului MN. Deoarece OAMB este romb rezulta  $AB \perp OM$ , analog  $CD \perp MN$ , deci AB este paralel cu CD. Analog demonstram ca AD este paralel cu BC, deci ABCD este un paralelogram inscriptibil, i.e. ABCD este dreptunghi. (3p)

b) Notam  $S=a+b+c+d$ . Aplicand inegalitatea C-B-S conditiei din enunt avem

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = (AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4)^2 \leq 4(AG_1^2 + BG_2^2 + CG_3^2 + DG_4^2) = \frac{4}{9}(\sum |4a - S|^2)$$

Iar de aici, folosind  $z\bar{z} = |z|^2$  obtinem  $S=a+b+c+d=0$ . Aplicand punctul a) obtinem cerinta problemei, i.e. ABCD=dreptunghi. (4p)