CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ

Suceava, 22 februarie 2014

Clasa a IX-a - profil tehnic, profil servicii şi resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE

1. Fie $E(x)=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2}$.

a) (2p) Determinaţi x pentru care expresia are sens ;

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

b) (3p) Arătaţi că: $\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{2}+4$;

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}}=5-\sqrt{3}$$

c) (2p) Determinaţi $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $E(x)\in\mathbb{Z}$.

Rezolvare:

a) $x-2\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{2\}$

b) Se foloseşte formula radicalilor compuşi sau verificarea relaţiilor cerute cu ajutorul pătratului unui binom

c) $E(x)=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2}=\dfrac{9}{x-2}$

$\dfrac{9}{x-2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (x-2)/9 \Leftrightarrow \mathrm{x}\in\{-7,-1,1,3,5,11\}$

a) $x-2\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{2\}$	2 puncte
b)Verificarea fiecărei relaţii	3 puncte
c) $\dfrac{9}{x-2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (x-2)/9$	1 punct
$\mathrm{x}\in\{-7,-1,1,3,5,11\}$	1 punct

2. Fie numărul real $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1,61803398$ (Numărul de aur).

a) (2p) Arătaţi că ϕ este soluţie a ecuaţiei $x^2-x-1=0$;

b) (2p) Arătaţi că $\phi^4=3\phi+2$;

c) (2p) Arătaţi că dacă a,b sunt numere reale strict pozitive care verifică egalitatea

$\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{a}{b}$ atunci $\dfrac{a}{b}=\phi$;

d) (1p) Arătaţi că $\phi_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}$ reprezintă aproximarea zecimală prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-1} a numărului ϕ.

Rezolvare:

a) Verificare sau rezolvarea ecuaţiei de gr. al II lea

b) $\phi^2-\phi-1=0 \Leftrightarrow \phi^2=\phi+1 \Leftrightarrow \phi^3=\phi^2+\phi \Leftrightarrow \phi^3=2\phi+1 \Leftrightarrow$
$\phi^4=2\phi^2+\phi=3\phi+2$

c) $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow 1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$

Notăm $\frac{a}{b}=x \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Cum a şi b sunt numere reale pozitive atunci

$\frac{a}{b}=\phi$

d) $\phi_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=1,6$

a) Verificare sau rezolvarea ecuaţiei de gr. al II lea	2 puncte
b) $\phi^2-\phi-1=0 \Leftrightarrow \phi^2=\phi+1$	1 punct
$\phi^3=\phi^2+\phi \Leftrightarrow \phi^3=2\phi+1 \Leftrightarrow \phi^4=2\phi^2+\phi=3\phi+2$	1 punct
c) $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow 1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$	1 punct
$\frac{a}{b}=x \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ Cum a şi b sunt numere reale pozitive atunci $\frac{a}{b}=\phi$	1 punct
d) $\phi_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=1,6$	1 punct

3. Fie numărul $N=\underbrace{20142014...2014}_{de\ 2014\ \text{ori}\ 2014}$.

a) (2p) Aflaţi numărul de cifre ale numărului N ;

b) (5p) Arătaţi că $N=\frac{2014}{9999}\left(10^{8056}-1\right)$.

Rezolvare:

a) Numărul de cifre ale numărului N este $2014\cdot 4=8056$

b) $N=\underbrace{20142014...2014}_{de\ 2014\ \text{ori}\ 2014}=2014\cdot 10^{2013\cdot 4}+2014\cdot 10^{2012\cdot 4}+...+2014\cdot 10^{1\cdot 4}+2014$

$N = 2014\cdot\left(10^{2013\cdot 4}+10^{2012\cdot 4}+...+10^{1\cdot 4}+1\right)=\frac{2014}{9999}\left(10^{8056}-1\right).$

a) $2014\cdot 4 = 8056$	2 puncte
b) $N=\underbrace{20142014...2014}_{de\ 2014\ \text{ori}\ 2014}=2014\cdot 10^{2013\cdot 4}+2014\cdot 10^{2012\cdot 4}+...+2014\cdot 10^{1\cdot 4}+2014$	1 punct
$N = 2014\cdot\left(10^{2013\cdot 4}+10^{2012\cdot 4}+...+10^{1\cdot 4}+1\right)$	1 punct
Raţia progresiei geometrice din paranteză este $q=10^4$ şi numărul de termeni 2014	1 punct
$N=\frac{2014}{9999}\left(10^{8056}-1\right).$	2 puncte

4. În ΔABC se consideră punctele D, E, F astfel încât $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}.$

a) (1p) Realizaţi un desen care să ilustreze cerinţele problemei;

b) (2p) Arătaţi că pentru oricare punct O din planul (ABC) are loc relaţia $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$;

c) (4p) Arătaţi că pentru oricare punct O din planul (ABC) are loc relaţia

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}.$$

Rezolvare:

b) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ (vectorul de poziţie al unui punct care imparte un segment intr-un raport dat sau orice altă metodă)

c) Folosind punctul anterior şi relaţiile analoage, prin adunarea lor se obţine cerinţa.

a) realizarea desenului	1 punct
b) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$	2 puncte
c) $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right), \overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)$	2 puncte
Finalizare	2 puncte