CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ

Suceava, 22 februarie 2014

CLASA A XI-A

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

Barem de corectare

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.
   a) (2p) Aflați matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ care satisfac egalitatea $AX=XA$.
   b) (5p) Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația: $X^3=A$.

Rezolvare și barem:

a) $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și $AX=XA \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$ ………………… 2 puncte

b) $X^3=A \Rightarrow X^4=AX$ și $X^4=XA \Rightarrow AX=XA \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$ …. 3 puncte

Finalizare: $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ………………………………………...……….. 2 puncte

2. Determinați numerele reale *a* și *b* știind că matricele $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ satisfac simultan relațiile: $X\cdot Y=\begin{pmatrix}10 & 13\\ 22 & 29\end{pmatrix}$ și $Y\cdot X=\begin{pmatrix}a & 16\\ 19 & b\end{pmatrix}$.

Rezolvare și barem:

$\det(XY)=29\cdot 10-22\cdot 13=4$ și $\det(YX)=ab-16\cdot 19=ab-304 \Rightarrow ab-304=4 \Rightarrow$ $ab=308$ ………………………………………………………………… 3 puncte

$Tr(XY)=a+b$ și $Tr(YX)=10+29 \Rightarrow a+b=39$ ……………………… 3 puncte

Finalizare: $a=11$ și $b=28$ sau $a=28$ și $b=11$ ……………………...... 1 punct

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{ax^2+bx+5}}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.
   Determinați parametrii *a* și *b,* astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă orizontală spre $-\infty$ dreapta de ecuație $y=1$.

Rezolvare și barem:

Trebuie ca $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ……………………………………………………… 1 punct

Dar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)+3-\frac{2}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[3+\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)\right]$; Pentru ca

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, trebuie ca $\sqrt{a}-1=0 \Rightarrow a=1$ ……………………………...3 puncte

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}}\left(3+\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)\right) = 3+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = 3+\frac{b}{2}$.........

………………………………………………………………………………… 2 puncte

Finalizare: $a=1$ și $b=-4$ ………………………………………………… 1 punct

4. Într-un sistem cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(0,6)$, $B(5,4)$, $C(3,2)$ și $D(1,2)$. Să se determine un punct M de pe segmental [AB] pentru care aria triunghiului MAD să fie egală cu aria triunghiului MBC.

Rezolvare și barem:

Ecuația dreptei AB: $y = 6-\frac{2x}{5}$ ……………………………………………….. 1 punct

$M(x,y)\in[AB] \Rightarrow x\in[0,4]$ și $y=6-\frac{2x}{5}$………………………………….. 2 puncte

$\Delta_1 = \Delta_{MAD} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4x+y-6$ și $\Delta_2 = \Delta_{MBC} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2x-2y-2$ ….. 2 puncte

$|\Delta_1| = |\Delta_2| \Leftrightarrow |4x+y-6| = |2x-2y-2| \Leftrightarrow \left|4x+6-\frac{2x}{5}-6\right| = \left|2x-12+\frac{4x}{5}-2\right| \Leftrightarrow$

$18|x| = 14|x-5| \Leftrightarrow 9x = 7(5-x) \Leftrightarrow x=\frac{35}{16}$ apoi $y=\frac{41}{8}$ ………………….. 2 puncte

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ
Suceava, 22 februarie 2014

CLASA A XII-A

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

Barem de corectare

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{e^x}$.

   a) (2p) Calculați derivata funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$;

   b) (2p) Calculați $\int h(x)\,dx$;

   c) (3p) Calculați $\int \dfrac{2x^2+2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

   Rezolvare și barem:

   a) $h(x)=\dfrac{-x^2+x}{x^2+x+1}$ ………………………………………………………..… 1 punct

   $h'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ ……………………………………………………..…. 1 punct

   b) $\int h(x)dx=\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)+\mathrm{C}=\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{e^x}\right)+C$ ……………….. 2 puncte

   c) $\int \dfrac{2x^2+2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=\int\left(-h'(x)\right)dx=-h(x)+C=-\dfrac{-x^2+x}{x^2+x+1}=\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1}$ … 3 puncte

2. Pentru două numere reale a și b definim: $\max(a,b)=\begin{cases}a,\ dacă\ a\ge b\\ b,\ dacă\ b>a\end{cases}$. Considerăm funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\left(x,\dfrac{2}{x+1}\right)$. Arătați că funcția f admite primitive pe $(-1,+\infty)$ și determinați primitiva F al cărei grafic conține punctul $A(0,1)$.

   Rezolvare și barem:

   $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1},\ dacă\ x\in(-1,1)\\ x,\ dacă\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$ ………………………………………………. 2 puncte

   Observăm că f este continuă, deci admite primitive ………………………… 1 punct

$$F(x)=\begin{cases}2\ln(x+1)+c_1,\ dacă\ x\in(-1,1)\\ \dfrac{x^2}{2}+c_2,\ dacă\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$$ ……………………………………. 2 puncte

F este continuă $\Rightarrow\ 2\ln 2+c_1=\dfrac{1}{2}+c_2\ \Rightarrow F(x)=\begin{cases}2\ln(x+1)+c,\ dacă\ x\in(-1,1)\\ \dfrac{x^2}{2}+2\ln 2-\dfrac{1}{2}+c,\ dacă\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$

Pentru că $F(0)=1\ \Rightarrow\ c=1\ \Rightarrow\ F(x)=\begin{cases}2\ln(x+1)+1,\ dacă\ x\in(-1,1)\\ \dfrac{x^2}{2}+2\ln 2+\dfrac{1}{2},\ dacă\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$ …2 puncte

3. Fie $G=(0,1)$ și $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$, $\forall x,y\in G$. Admitem că $(G,\circ)$ este grup.

a) (2p) Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,\circ)$;

b) (5p) Calculați $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{2}{3}\circ\ldots\circ\dfrac{2013}{2014}$.

Rezolvare și barem:

a) *f* este bijectivă ……………………………………………………….. 1 punct

$f(xy)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in(0,+\infty)$ ………………………………… 1 punct

b) $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=\dfrac{2}{3}$, …, $f(2013)=\dfrac{2013}{2014}$ ……………………...………..2 puncte

$\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{2}{3}\circ\ldots\circ\dfrac{2013}{2014}=f(1)\circ f(2)\circ\ldots\circ f(2013)=f(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2013)=\dfrac{2013!}{2013!+1}$ ….. 3 puncte

4. Se consideră $(G,.)$ un grup în care $x^3=e$, $\forall x\in G$ și $x^2y^2=y^2x^2$, $\forall x,y\in G$. Să se arate că *G* este grup abelian.

Rezolvare și barem:

Din $x^2y^2=y^2x^2$, înmulțind la stânga cu un x $\Rightarrow$ $y^2=xy^2x^2$ ……………….. 2 puncte

Din $y^2=xy^2x^2$, înmulțind la dreapta cu un x $\Rightarrow$ $y^2x=xy^2$ ………………… 2 puncte

Din $y^2x=xy^2$, înmulțind la stânga cu un y $\Rightarrow$ $x=yxy^2$ ……………………. 2 puncte

Din $x=yxy^2$, înmulțind la dreapta cu un y $\Rightarrow$ $xy=yx$ ……….…………….. 1 punct