CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Fie *n* un număr natural. Dacă în faţa lui *n* punem cifra 7 obţinem un număr de cinci ori mai mare decât atunci când punem la sfârşitul lui *n* cifra 7. Aflaţi cea mai mică valoare a lui *n*.

Din relaţia $\overline{7n} = 5\cdot\overline{n7} \Rightarrow$ u(n) = 5	**2p**
Se obţine relaţia $\overline{7a5} = 5\cdot\overline{a57} \Rightarrow$ u(a) = 8	**1p**
Avem: $\overline{7b85} = 5\cdot\overline{b857} \Rightarrow$ u(b) = 2	**1p**
Apoi: $\overline{7c285} = 5\cdot\overline{c2857} \Rightarrow$ u(c) = 4	**1p**
Şi atunci: $\overline{7d4285} = 5\cdot\overline{d42857}$, obţinând d = 1	**1p**
Se obţine cea mai mică valoare a lui *n* = 14285.	**1p**

OBS. Dacă analizează corect, n de o cifră, n de două cifre, … , se acordă câte **1p** pentru fiecare caz şi maxim după ce ajunge la ecuaţia finală $\overline{7abcde} = 5\cdot\overline{abcde7}$ şi o rezolvă obţinând $\overline{abcde} = 14285$.

SUBIECTUL 2

Numărul natural $\overline{abcd}$ are suma cifrelor egală cu 27. Arătaţi că numărul $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 297.

$\overline{abcd} + \overline{dcba}$ = 1001a + 110b + 110c + 1001d =	**2p**
= 11(91a + 10b + 10c + 91d) =	**1p**
= 11(81a + 81d + 10a + 10b + 10c + 10d) =	**1p**
= 11[81a + 81d + 10(a + b + c + d)].	**1p**
81a + 81d + 10(a + b + c + d) se divide cu 27,	**1p**
Rezultă $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 11· 27 = 297	**1p**

SUBIECTUL 3

Câtul împărţirii a două numere naturale este 3, iar restul este 7. Dacă triplăm deîmpărţitul, atunci restul este 6. Determinaţi numerele.

Fie a şi b cele două numere. Atunci a = 3b + 7, cu b > 7.	**2p**
Înmulţind cu 3 egalitatea anterioară, avem 3a = 9b + 21, sau 3a = (9b + 15) + 6.	**1p**
(9b + 15) se împarte exact la b,	**1p**
9b se împarte exact la b, rezultă că 15 se împarte exact la b.	**1p**
Dar b > 7, rezultă b = 15.	**1p**
Şi atunci a= 3· 15 + 7 = 52.	**1p**

SUBIECTUL 4

a) Arătaţi că numărul $2^{221} + 2^{22}\cdot 2^{199}$ este pătrat perfect.
b) Dacă $x + 2^{22}\cdot y = 2^{222}$, arătaţi că $2^{245}\cdot y + (x - 2^{22}\cdot y)\cdot(x + 2^{22}\cdot y)$ este cub perfect.

a)

$2^{221} + 2^{22}\cdot 2^{199} = 2^{221} + 2^{221} =$	**1p**
$= 2^{222} =$	**1p**
$= (2^{111})^2$, pătrat perfect.	**1p**

b)

$2^{245}\cdot y + (x - 2^{22}\cdot y)\cdot(x + 2^{22}\cdot y) = 2^{245}\cdot y + (x - 2^{22}\cdot y)\cdot 2^{222} =$	**1p**
$= 2^{245}\cdot y + 2^{222}\cdot x - 2^{244}\cdot y =$	**1p**
$= 2^{222}\cdot x + 2^{244}\cdot y =$	**1p**
$= 2^{222}(x + 2^{22}\cdot y) = 2^{222}\cdot 2^{222} = 2^{444} = (2^{148})^3$, cub perfect.	**1p**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Verificaţi dacă 13 divide 222222.

b) Un număr natural A are 2001 cifre dintre care una este 1, iar toate celelalte sunt egale cu 2. Arătaţi că A nu este număr prim.

a) 222222 = 13· 17094, rezultă că 13 | 222222.	**1p**
b) Singurul număr care trebuie arătat că nu este prim este cel cu ultima cifră 1, celelalte care au cifra 1 pe altă poziţie nu sunt prime având ultima cifră 2.	**2p**
Fie numărul A = $\underbrace{22\ldots21}_{2001\ \text{cifre}} = \underbrace{22\ldots2}_{1998\ \text{cifre}}\cdot 1000 + 221$.	**1p**
Deoarece 1998 = $\mathcal{M}_6$, rezultă din a) că $\underbrace{22\ldots2}_{1998\ \text{cifre}} = \mathcal{M}_{13}$.	**2p**
Cum 221 = $\mathcal{M}_{13}$, rezultă A este divizibil cu 13, deci nu este prim.	**1p**

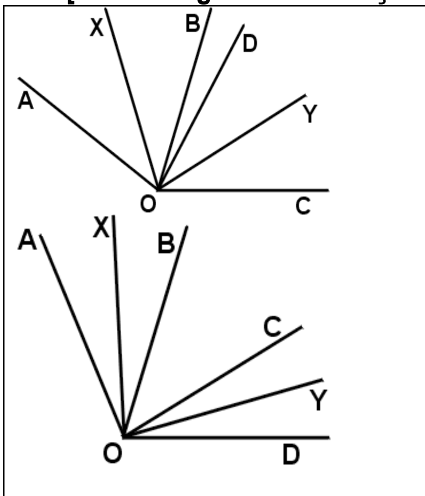
SUBIECTUL 2

Determinaţi numerele prime distincte a, b, c, pentru care ab + bc + ca + 67abc = 2041.

Putem presupune a < b < c. Numerele a, b, c nu pot fi toate impare pentru că atunci suma ar fi un număr par.	**2p**
Cel puţin unul dintre numere este par, iar acesta este a=2.	**1p**
Relaţia devine 2b + bc + 2c + 134bc = 2041, sau 2(b + c) + 135bc = 2041.	**1p**
Pentru b>3 şi c>5 avem 2(b + c) + 135bc > 2· 8 + 135· 15 = 2041.	**2p**
Rezultă b = 3 şi c = 5. Cele trei numere sunt: 2, 3, 5(cu permutările lor). Sau (a, b, c)∈{(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)}.	**1p**

SUBIECTUL 3

Unghiurile AOB şi COD sunt neadiacente şi au interioarele disjuncte, iar [OB este bisectoarea unghiului AOC. Ştiind că m(∢COD) este cu 12^0 mai mică decât m(∢COB) şi că unghiul format de bisectoarele [OX şi [OY ale unghiurilor AOB şi COD are măsura de 78^0, aflaţi câte grade are unghiul YOA.

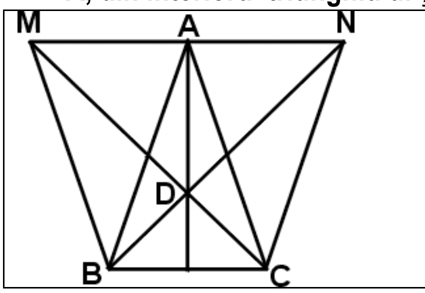


Problema are două soluţii, după cum D∈Int(∢BOC) sau C∈Int(∢BOD). **Pentru D∈Int(∢BOC).** Notăm m(∢YOD) = m(∢YOC) = x. Avem: m(∢BOD) = 12^0.	**1p**
m(∢AOB) = m(∢BOC) = 2x + 12^0 şi m(∢BOX) = x + 6^0.	**1p**
Se obţine ecuaţia: x + 12^0 + x + 6^0 = 78^0, de unde x = 30^0. Şi atunci m(∢YOA) = m(∢YOD) + m(∢BOD) + m(∢BOA) = 30^0 + 12^0 + 72^0 = 114^0.	**2p**
Pentru C∈Int(∢BOD). Notând m(∢YOD) = m(∢YOC) = x. m(∢AOB) = m(∢BOC) = 2x + 12^0 şi m(∢BOX) = x + 6^0.	**1p**
Se obţine ecuaţia: x + 2x + 12^0 + x + 6^0 = 78^0, de unde x = 15^0. Şi atunci m(∢YOA) = m(∢YOC) + 2· m(∢BOC) = 15^0 + 2· 42^0 = 99^0.	**2p**

OBS. Pentru rezolvarea completă a unui singur caz se acordă 4p.

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ABC, cu AB = AC. O dreaptă d ce conţine vârful A formează cu cele două laturi AB şi AC, în exteriorul triunghiului, două unghiuri congruente. Dacă D este un punct pe bisectoarea unghiului A, din interiorul triunghiului şi CD ∩ d = {M}, BD ∩ d = {N}, demonstraţi că AM = AN şi ∢BMC≡∢BNC.



ΔABD≡ΔACD(LUL) ⇒ ∢ABD≡∢ACD.	**1p**
ΔABN≡ΔACM(ULU) ⇒ AM = AN.	**2p**
Din congruenţa anterioară, rezultă ∢AMC≡∢ANB(1),	**1p**
ΔABM≡ΔACN(LUL) ⇒ ∢AMB≡∢ANC(2).	**2p**
Din (1) şi (2), rezultă ∢BMC≡∢BNC.	**1p**

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1 **a) Calculaţi** $\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+...+\frac{1}{16\cdot 18}$. **b) Fie şirul** $\frac{1}{2\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 6}, \frac{1}{6\cdot 8}, \ \dots\ , \frac{1}{(2n-2)\cdot 2n}, \dots$.

Determinaţi grupul de termeni consecutivi a căror sumă este $\frac{3}{28}$.

a) $\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\dots+\frac{1}{16\cdot 18}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{8\cdot 9}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\dots+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}$.	3p
b) Exceptând factorul $\frac{1}{4}$ putem lua suma la grupul căutat: S = $\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}+\dots+\frac{1}{(m-1)\cdot m}$.	1p
S = $\frac{1}{k}-\frac{1}{m}$. Avem $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right)=\frac{3}{28}$ sau $\frac{1}{k}-\frac{1}{m}=\frac{3}{7}$.	1p
Obţinem $k=\frac{7m}{3m+7}$. Avem $3m+7 \mid 7m$, de unde $3m+7 \mid (21m+49-21m)=49$.	1p
Cum $3m+7>10$, rezultă $3m+7=49$; $m=14$ şi apoi k=2. Grupul este: $\frac{1}{4\cdot 6}, \frac{1}{6\cdot 8}, \ \dots\ , \frac{1}{26\cdot 28}$.	1p

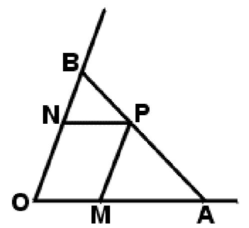
SUBIECTUL 2 **Se consideră numerele B =** $\overline{b\underbrace{00...0}_{2n+1\ cifre}b}$. **Demonstraţi că** $\sqrt{B}$ **este număr iraţional.**

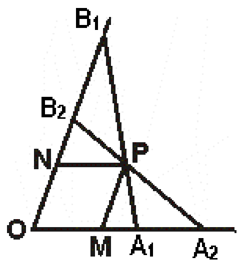
Dacă $b\in\{2, 3, 7, 8\}$, evident $\sqrt{B}$ este iraţional, deoarece B nu este pătrat perfect.	2p
Dacă b = 5, atunci B este divizibil cu 5, dar nu cu 25, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional.	1p
Dacă b = 6, atunci B este divizibil cu 2, dar nu cu 4, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional. (Sau $3 \mid B$ şi $9\nmid B$).	1p
Pentru $b\in\{1, 4, 9\}$, atunci $B=b\cdot \overline{1\underbrace{000...0}_{2n+1\ cifre}1}$.	1p
Dar $\overline{1\underbrace{000...0}_{2n+1\ cifre}1}=\mathcal{M}_3+2$ (sau $(10^{n+1})^2<\overline{1\underbrace{000...0}_{2n+1\ cifre}1}<(10^{n+1}+1)^2$), deci nu-i pătrat perfect, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional.	2p

SUBIECTUL 3 **a) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duce o dreaptă d, astfel încât $d\cap OX=\{A\}$, $d\cap OY=\{B\}$, PN||OX, $N\in OY$, PM||OY, $M\in OX$. Arătaţi că:** $OA=\frac{OM\cdot AB}{BP}$ **şi** $OB=\frac{ON\cdot AB}{AP}$.

b) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duc două drepte d_1 şi d_2, astfel încât $d_1\cap OX=\{A_1\}$, $d_1\cap OY=\{B_1\}$ $d_2\cap OX=\{A_2\}$, $d_2\cap OY=\{B_2\}$. Demonstraţi că dacă $\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OB_1}=\frac{1}{OA_2}+\frac{1}{OB_2}$,

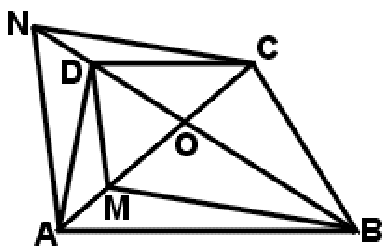
atunci [OP este bisectoarea unghiului XOY.





a) PM || OB $\Rightarrow \frac{OM}{OA}=\frac{BP}{AB} \Rightarrow OA=\frac{OM\cdot AB}{BP}$, PN || OA $\Rightarrow \frac{ON}{OB}=\frac{AP}{AB} \Rightarrow OB=\frac{ON\cdot AB}{AP}$.	2p
b) Din a) $OA_1=\frac{OM\cdot A_1B_1}{B_1P}$, $OA_2=\frac{OM\cdot A_2B_2}{B_2P}$, $OB_1=\frac{ON\cdot A_1B_1}{A_1P}$, $OB_2=\frac{ON\cdot A_2B_2}{A_2P}$.	1p
Înlocuind se obţine: $\frac{B_1P}{OM\cdot A_1B_1}+\frac{A_1P}{ON\cdot A_1B_1}=\frac{B_2P}{OM\cdot A_2B_2}+\frac{A_2P}{ON\cdot A_2B_2}$, de unde	1p
$\frac{B_1P}{OM\cdot A_1B_1}-\frac{B_2P}{OM\cdot A_2B_2}=\frac{A_2P}{ON\cdot A_2B_2}-\frac{A_1P}{ON\cdot A_1B_1}$ sau $\frac{1}{OM}\left(\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}\right)=\frac{1}{ON}\left(\frac{A_2P}{A_2B_2}-\frac{A_1P}{A_1B_1}\right)$(1).	1p
Demonstrăm că $\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}=\frac{A_2P}{A_2B_2}-\frac{A_1P}{A_1B_1} \Leftrightarrow \frac{A_1P+B_1P}{A_1B_1}=\frac{A_2P+B_2P}{A_2B_2} \Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{A_1B_1}=\frac{A_2B_2}{A_2B_2}$ (A)	1p
Dar $\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}\neq 0$, pentru că în caz contrar s-ar obţine $\frac{B_1P}{A_1B_1}=\frac{B_2P}{A_2B_2}$ şi din reciproca teoremei lui Thales ar rezulta că A_1A_2 || B_1B_2 (F). Deducem din (1) că OM=ON. Atunci OMPN este romb şi [OP este bisectoarea $\sphericalangle XOY$.	1p

SUBIECTUL 4 **Fie trapezul ABCD, AB || CD, $AC\cap BD=\{O\}$ şi $M\in(OA$, astfel încât OM = OD şi $M\neq A$. Dacă CN || BM, $N\in BD$, demonstraţi că AMDN este trapez isoscel.**



DC || AB $\Rightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}$	2p
BM || CN $\Rightarrow \frac{OM}{OC}=\frac{OB}{ON}$	1p
Din cele două relaţii rezultă $\frac{OM}{OA}=\frac{OD}{ON}$, de unde DM || AN.	2p
Cum ΔODM este isoscel de vârf O, rezultă AMDN este trapez isoscel.	2p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1 **Aflaţi numerele raţionale a şi b, astfel încât** $\dfrac{a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \dfrac{b}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

Deoarece $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ şi $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$, ecuaţia din enunţ se scrie: $\dfrac{a}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{b}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$.	2p
Sau $a(\sqrt{2}+1) - b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$.	2p
Apoi $a + b = (b - a + 1)\cdot\sqrt{2}$, dar a şi b sunt numere raţionale şi $\sqrt{2}$ este iraţional,	1p
rezultă $b - a + 1 = a + b = 0$.	1p
Se obţine $a = \dfrac{1}{2}$ şi $b = -\dfrac{1}{2}$.	1p

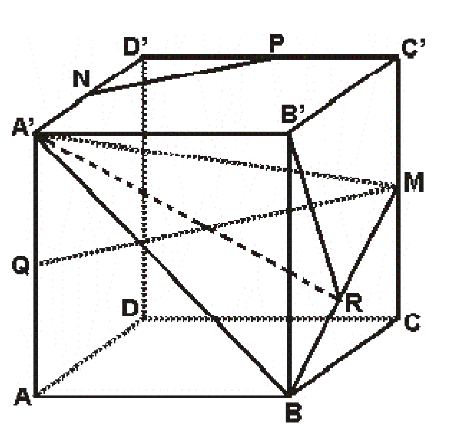
SUBIECTUL 2 **Fie** $A_i = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_n i}$, **unde** $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **şi n un număr natural nenul. Arătaţi că** $p = \sqrt{\left(A_1^2 + A_4^2 + A_6^2 + A_7^2\right)\left(A_2^2 + A_3^2 + A_5^2 + A_8^2\right)}$ **este număr natural.**

Se notează cu $a = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$, $p_1 = A_1^2 + A_4^2 + A_6^2 + A_7^2$ şi $p_2 = A_2^2 + A_3^2 + A_5^2 + A_8^2$, $p_1, p_2 > 0$ naturale.	2p
Demonstrăm că $p_1=p_2$. Avem $(10a+1)^2 +(10a+4)^2 +(10a+6)^2 +(10a+7)^2=(10a+2)^2+(10a+3)^2+(10a+5)^2+(10a+8)^2$.	2p
Se calculează: $(10a+4)^2 - (10a+3)^2 +(10a+6)^2 - (10a+5)^2=(10a+2)^2 - (10a+1)^2+(10a+8)^2 - (10a+7)^2$ sau	1p
$20a+7+20a+11= 20a+3+20a+15$ (A).	1p
Şi atunci $p_1=p_2$, de unde $p = \sqrt{p_1\cdot p_2} = \sqrt{p_1^2} = p_1$, este număr natural.	1p

SUBIECTUL 3 **În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor CC', A'D', C'D'.**

a) Aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreptele BM şi NP.

b) Dacă muchia cubului este de 6 cm, aflaţi aria triunghiului A'BM.

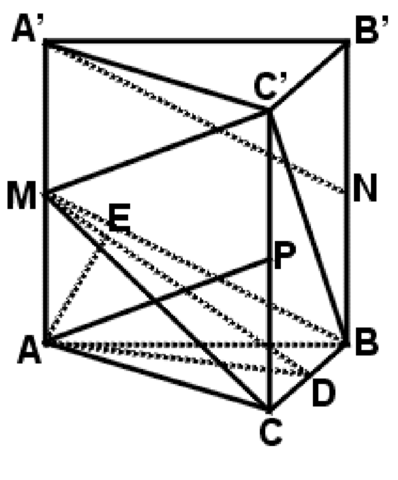


a) Fie Q mijlocul lui AA', NP‖QM, rezultă $m[\sphericalangle(BM, NP)] = m[\sphericalangle(BM, MQ)]$.	1p
Dacă a este muchia cubului, $\cos(\sphericalangle BMQ) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.	2p
b) Fie $B'R \perp BM$. În ΔB'BM: $BM\cdot B'R = 6\cdot 6$, de unde $B'R = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.	1p
$A'R = \sqrt{A'B'^2 + B'R^2} = \sqrt{36 + \dfrac{144\cdot 5}{25}} = \dfrac{6}{5}\sqrt{25+20} = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$.	1p
$\mathcal{A}_{A'BM} = \dfrac{BM\cdot A'R}{2} = 3\sqrt{5}\cdot\dfrac{18\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{1}{2} = 27$.	2p

SUBIECTUL 4 **În prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C', AB=AA'=12 cm.**

a) Determinaţi poziţia punctului M pe muchia AA', ştiind că distanţa de la punctul A la planul (MBC) este $3\sqrt{3}$ **cm.**

b) Dacă N şi P sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv CC', determinaţi sinusul unghiului dintre AP şi A'N.



a) Dacă D este mijlocul muchiei BC, atunci $(AMD)\perp(MBC)$ şi distanţa de la A la (MBC) este AE, unde $AE\perp MD$, $E\in(MD)$.	1p
$AE=3\sqrt{3}$ şi $AD=6\sqrt{3}$, rezultă $m(\sphericalangle ADM)=30^0$. Dacă AM=x, MD=2x, se obţine în ΔAMD ecuaţia $4x^2 - x^2=108$, de unde x=6. Sau x se poate obţine din relaţia $AM\cdot AD=MD\cdot AE$. Deci M este mijlocul muchiei AA'.	2p
b) Din MC' ‖ AP, MB ‖ A'N, rezultă că avem de calculat sinusul unghiului dintre MC' şi MB.	1p
$MC'=MB = \sqrt{12^2+6^2} = 6\sqrt{5}$ şi $C'B=12\sqrt{2}$.	1p
$6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}\cdot\sin(\sphericalangle C'MB) = 12\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{3}$.	1p
$\sin(\sphericalangle C'MB) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.	1p