Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a X-a

1. Fie $r > 0$ un număr real pozitiv, $a, b, c \in \mathbb{C}$ numere complexe distincte cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = r$, iar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ numere reale oarecare cu proprietatea că $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Arătaţi că

$$|\alpha a + \beta b + \gamma c| = r \Longleftrightarrow \alpha\beta|a-b|^2 + \alpha\gamma|a-c|^2 + \beta\gamma|b-c|^2 = 0\,.$$

Barem de corectare:

start	1p
scrie echivalent $\lvert\alpha a + \beta b + \gamma c\rvert = r \Longleftrightarrow (\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}) = r^2$	2p
$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)r^2 + \sum \alpha\beta(a\overline{b} + \overline{a}b) = r^2$	2p
$\Longleftrightarrow \sum \alpha\beta(2r^2 - a\overline{b} - \overline{a}b) = 0$	3p
$\Longleftrightarrow \sum \alpha\beta\lvert a-b\rvert^2 = 0$	2p
total	**10p**

2. Fie ε o rădăcină primitivă de ordinul 2014 a unităţii, iar $u, v \in \mathbb{C}$ numerele complexe date de

$$u = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + 2014\varepsilon^{2013},$$
$$v = 1^2 + 2^2\varepsilon + 3^2\varepsilon^2 + \ldots + 2014^2\varepsilon^{2013}.$$

a) Arătaţi că $u, v \neq 0$.
b) Stabiliţi valorile minime şi maxime pe care le pot avea modulele numerelor u, respectiv v.

Barem de corectare:

start	1p
arată că $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$	
şi obţine că $u = \frac{2014}{\varepsilon-1} \neq 0$	2p
arată că $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{n(n+1)x^{n+1}(x-1)-n(n+3)x^n(x-1)+x^n-1}{(x-1)^3}$	
şi obţine că $v = \frac{2014\cdot 2015\cdot(\varepsilon-1)-2\cdot 2014}{(\varepsilon-1)^2}$	3p
deoarece $\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, rezultă că $2015(\varepsilon-1) - 2 \neq 0$, şi $v \neq 0$	1p
obţine $\lvert u\rvert = \frac{1007}{\lvert sin\frac{k\pi}{2014}\rvert}$, cu $max\lvert u\rvert = \frac{1007}{sin\frac{\pi}{2014}}$ şi $min\lvert u\rvert = \frac{1007}{sin\frac{1005\pi}{2014}}$	2p
obţine $\lvert v\rvert = 2\cdot 2014 \left\lvert \left(\frac{1}{\varepsilon-1} - \frac{2015}{4}\right)^2 - \left(\frac{2015}{4}\right)^2 \right\rvert$ şi determină $max\lvert v\rvert$ şi $\min\lvert v\rvert$	1p
total	**10p**

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia

$$x + y \leq 3^x f(x) + 3^y f(y) \leq (x+y)3^{x+y} \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este unică şi determinaţi această funcţie.
b) Determinaţi $min(f(\mathbb{N}))$ şi $max(f(\mathbb{N}))$.

c) Arătaţi că $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0,2])$.

Barem de corectare:

start	1p
pentru $x = y = 0$ obţine $0 \leq f(0) + f(0) \leq 0$, deci $f(0) = 0$	1p
pentru $y = -x$ obţine că $3^x f(x) + 3^{-x} f(-x) = 0$ (1)	1p
pentru $y = 0$ obţine inegalitatea $f(x) \geq x \cdot 3^{-x}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$	1p
folosind (1) pentru $-x$ obţine inegalitatea $f(x) \leq x \cdot 3^{-x}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$	
şi deduce că $f(x) = x \cdot 3^{-x}, (\forall) x \in \mathbb{R}$	1p
arată că $f(n) > f(n+1) > 0 = f(0), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	1p
deci $min(f(\mathbb{N})) = f(0) = 0$ şi $max(f(\mathbb{N})) = f(1) = \frac{1}{3}$	1p
observă că $f(x) < 0, (\forall) x < 0 = f(0)$, deci $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0,\infty)))$	1p
arată că $f(x) \geq f(x+1), (\forall) x \geq \frac{1}{2}$ şi deduce că	
pentru orice $x \geq \frac{3}{2}$ există $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ cu $f(x_0) \geq f(x)$	1p
de unde $max(f([0,\infty))) = max(f([0,\frac{3}{2}))) = max(f([0,2)))$	1p
total	**10p**

4. Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$3^{x^{22}} = 2014 - 28^{(1-x)^2}.$$

Barem de corectare:

start	1p
consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^{22}}$, $g(x) = 2014 - 28^{(1-x)^2}$	1p
şi arată că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, \infty)$	1p
iar g este strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi strict descrescătoare pe $[1, \infty)$	1p
observă că $f(x) \in [1,3], (\forall) x \in [0,1]$ şi $g(x) \in [1986, 2013], (\forall) x \in [0,1]$	1p
astfel că ecuaţia $f(x) = g(x)$ nu are soluţii în $[0,1]$	1p
resp. are cel mult câte o soluţie în fiecare din intervalele $(-\infty, 0]$, resp. $[1, \infty)$	1p
deoarece $f(-1) = 3 > 0 > 2014 - 28^4 = g(-1)$ şi $f(0) = 1 < 1986 = g(0)$	
există o soluţie $x_1 \in (-1, 0)$	1p
deoarece $f(1) = 3 < 2013 = g(1)$ şi $f(2) = 3^{2^{22}} > 1986 = g(2)$	
există o soluţie $x_2 \in (1, 2)$	1p
obţine că ecuaţia are exact două soluţii	1p
total	**10p**

Succes!