Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$\det\left(A^3\right)=216;$ $\det\left(A^3\right)=\left(\det A\right)^3=6^3 \Rightarrow \det A=6;$	**2p**
	Teorema Hamilton−Cayley: $A^2-tr\left(A\right)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2,\left(\forall\right)A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R});$ $A^2-9\cdot A+6\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^3=9\cdot A^2-6\cdot A=75\cdot A-54\cdot I_2\Rightarrow 75\cdot A=A^3+54\cdot I_2\Rightarrow$	**3p**
	$75\cdot A=\begin{pmatrix}471 & 600\\ 75 & 96\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}54 & 0\\ 0 & 54\end{pmatrix}\Rightarrow 75\cdot A=\begin{pmatrix}525 & 600\\ 75 & 150\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$	**2p**
2.	$1<\log_{n^2+3n+1}\left(n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\right)<2\Leftrightarrow$ $n^2+3n+1<n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)<\left(n^2+3n+1\right)^2 \quad (1)$ Observând că $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\left(n^2+3n+1\right)^2-1\Rightarrow$ inegalitatea (1) este adevarată.	**3p**
	Din a) rezultă că $\left\{\log_{n^2+3n+1}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\right\}=\log_{n^2+3n+1}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)-1=$ $\log_{n^2+3n+1}\left[\left(n^2+3n+1\right)^2-1\right]-1;$	**2p**
	Notând $n^2+3n+1=m\to\infty$, obţinem: $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\log_m\left(m^2-1\right)-1\right]=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{m^2-1}{m}}{\ln m}=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\ln m+\ln\left(1-\dfrac{1}{m^2}\right)}{\ln m}=1.$	**2p**
3.	$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+n\cdot a_n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=n,n\geq 1;$	**2p**

	. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1 \\ \frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2 \\ \frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=3 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a_n}=\frac{n^2-n+2}{2};$ $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+...+\frac{n}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot\left(k^2-k+2\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k^3-k^2+2\cdot k\right)=$ $\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{2\cdot n\cdot(n+1)}{2}\right);$	**3p**
	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+...+\frac{n}{a_n}\right)=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{2\cdot n\cdot(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{8}$	**2p**
4.	a) Dacă $A^k=O_2 \Rightarrow (\det A)^k=0 \Rightarrow \det A=0$. După Hamilton-Cayley avem $A^2-\alpha\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2 \to A^2=\alpha A$. Se arată prin inducţie matematică că $A^k=\alpha^{k-1}\cdot A$. Din $A^k=O_2$ rezultă că $\alpha=0$ sau $A=O_2$ şi în fiecare caz $A^2=O_2$.	**4p**

	b) $f(x)=x, f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este surjectivă. Presupunem prin reducere la absurd că: $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), f(x)=x^n$, cu $n\geq 2$ ar fi surjectivă. Deci pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ există $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^n=A\Rightarrow X^{2n}=A^2=O_2$. Dacă $X^{2n}=O_2$ rezultă că $X^2=O_2$. Dacă $X^2=O_2\Rightarrow X^n=O_2\Rightarrow A=O_2$, contradicţie. Deci răspunsul este $n=1$.	**3p**