Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XI-a

Problema 1.

Start .... **(1p)**

(a)

Observă $F(X + \lambda I_n, Y + \mu I_n) = F(X, Y),\ (\forall)X, Y \in M_n(\mathbb{R}),\ (\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ..... **(2p)**

Deduce F neinjectivă .... **(1p)**

(b)

Din $M \in \mathrm{Im}(F) \Rightarrow (\exists)X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $M = F(X, Y)$ .... **(1p)**

Dacă X şi Y sunt inversabile, problema este rezolvată. Dacă doar una dintre matricele X, Y este neinversabilă, aplică următorul procedeu (prezentat în cele ce urmează pentru cazul când ambele matrice X, Y sunt neinversabile) doar matricei neinversabile. Dacă X şi Y sunt ambele neinversabile, consideră polinoamele $P_X = \det(X + tI_n), P_Y = \det(Y + tI_n)$ şi remarcă faptul că mulţimile rădăcinilor acestora, $Z(P_X), Z(P_Y)$, sunt mulţimi finite. Astfel, pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_X)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus Z(P_Y)$, obţine că $X + \lambda I_n$ şi $Y + \mu I_n$ sunt matrice inversabile .... **(3p)**

Alege $A = X + \lambda I_n,\ B = Y + \mu I_n$, cu $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_X),\ \mu \in \mathbb{R} \setminus Z(P_Y)$ şi deduce $F(A, B) = F(X, Y)$.. **(1p)**

Finalizează.. **(1p)**

Variantă de barem pentru subpunctul **(a):**

Orice exemplu concret ce implică neinjectivitatea, e.g., pentru $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu $A \neq B$, avem $(A, A) \neq (B, B)$, dar $F(A, A) = F(B, B)$.................................. **(3p)**

Problema 2.

Start .... **(1p)**

Presupune că există o funcţie ce satisface ipotezele problemei. Arată că $(\exists)x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. .... **(1p)**

Consideră $M \in [x_0, 2014 \cdot x_0]$, $M = \sup\{x \in [x_0, 2014 \cdot x_0] : f(x) = 0\}$. .... **(2p)**

Deduce $f(M) = 0$ şi $M < 2014 \cdot x_0$. .... **(1p)**

Arată că pentru fiecare şir $(x_n)_{n\geq 0} \subset (0, \infty)$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, $(\exists)N \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n) = 0$, $(\forall)n \geq N$ ($\spadesuit$).

În caz contrar, va exista un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subseteq (x_n)_{n\geq 0}$ pentru care $f(x_{n_k}) \neq 0$, $(\forall)k \geq 0$, ceea ce ar implica din ipoteză că $f(2014 \cdot x_{n_k}) = 0$, $(\forall)k \geq 0$. Cum f este continuă, avem că $f(2014 \cdot M) = \lim_{k\to\infty} f(2014 \cdot x_{n_k}) = 0 \neq f(2014 \cdot M)$, absurd. . . . . **(2p)**

Din $M < 2014 \cdot x_0$ deduce că există $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $M + \dfrac{1}{N_0} < 2014 \cdot x_0$ şi în consecinţă, pentru fiecare $n \geq N_0$ avem $M + \dfrac{1}{n} < 2014 \cdot x_0$. Alegând pentru ficare $n \geq N_0$, câte un număr a_n astfel încât $M < a_n < M + \dfrac{1}{n}$ obţine un şir de numere strict pozitive convergent la M. . . . . **(2p)**

Deoarece $x_0 \leq M < a_n < M + \dfrac{1}{n} < 2014 \cdot x_0$, $(\forall)n \geq N_0$ şi $M = \sup\{x \in [x_0, 2014 \cdot x_0] : f(x) = 0\}$, obţine că $f(a_n) \neq 0$, $(\forall)n \geq N_0$, ceea ce contrazice (♠). Concluzionează că nu există funcţii ce satisfac ipotezele problemei. . . . . **(1p)**

Problema 3.

Start. . . . . **(1p)**

Scrie $\det(A - xBC^T)$ sub forma $\begin{vmatrix} a_{11} - xb_1c_1 & \dots & a_{1n} - xb_1c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - xb_nc_1 & \dots & a_{nn} - xb_nc_n \end{vmatrix} =: \clubsuit$. . . . . **(1p)**

Foloseşte proprietăţile determinanţilor şi obţine

$$\clubsuit = \det A - x \left[\begin{vmatrix} b_1c_1 & \dots & b_1c_n \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2c_1 & \dots & b_2c_n \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)n} \\ b_nc_1 & \dots & b_nc_n \end{vmatrix} \right]$$

. . . . **(2p)**

Dezvoltă fiecare dintre determinanţii din sumă şi obţine
$\clubsuit = \det A - x \left(\sum_{j=1}^{n} b_1c_jA_{1j} + \sum_{j=1}^{n} b_2c_jA_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{n} b_nc_jA_{nj} \right)$. . . . . **(1p)**

Restrângând termenii obţine
$\clubsuit = \det A - x \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_jA_{ij} \right)$. . . . . **(1p)**

Observă că egalitatea precedentă se poate rescrie sub forma
$\clubsuit = \det A - xC^T \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} B$. . . . . **(2p)**

Utilizând formula inversei obţine
$\clubsuit = \det A - xC^T \left(\det A \cdot A^{-1}\right) B = \det A \cdot \left(1 - xC^TA^{-1}B\right)$ şi finalizează. . . . . . . **(2p)**

Problema 4.

Start. . . . . **(1p)**

Notează $a_n + i \cdot \dfrac{b_n}{n} =: u_n$, $\overline{u_n} =: v_n$, $(\forall)n \geq 1$. . . . . **(2p)**

Obţine $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n^2$ şi $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n^2$, $(\forall)n \geq 1$. .... **(2p)**

Deduce $u_{n+2} = \frac{1}{8} \cdot u_n^4$, $(\forall)n \geq 1$ şi în consecinţă $|u_{n+2}| = \frac{1}{8} \cdot |u_n|^4$, $(\forall)n \geq 1$. ... **(1p)**

Studiază convergenţa subşirurilor $(|u_{2k}|)_{k\geq 1}$, $(|u_{2k+1}|)_{k\geq 0}$, obţine convergenţa şirului $(|u_n|)_{n\geq 1}$ şi deduce că $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. .... **(2p)**

Observă

$|x_n|^2 = \left(\frac{a_n b_n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(a_n^2 - \frac{b_n^2}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{a_n b_n}{n}\right)^2 = \left|\frac{1}{2} \cdot u_n^2\right|^2 = \frac{1}{4}|u_n|^4$, $(\forall)n \geq 1$. . **(1p)**

Folosind $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$, obţine $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi finalizează. .... **(1p)**