Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”, ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a XII-a

Soluţii şi barem:

1.

Soluţie

Start **1p**

a) Fie $a, b \in G$, atunci $(aba^{-1})^k = b^k \Leftrightarrow ab^k a^{-1} = b^k \Leftrightarrow ab^k = b^k a \Leftrightarrow b^k \in Z(G), \forall\, b \in G$.... **2p**

$b^3, b^{22} \in Z(G) \Rightarrow b = b^{22}(b^3)^{-7} \in Z(G), \forall b \in G \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ abelian **2p**

b) Din egalităţile din enunţ rezultă: $x^{19} = y^{53} = z^2 = u$ **2p**

Fie $t = xyz$; din comutativitate obţinem $t^{1007} = x^{1007} \cdot y^{1007} \cdot z^{1007} = u \cdot u \cdot z \neq u$........... **2p**

Deci $t \neq u$ şi $t^{2014} = (t^{1007})^2 = z^2 = u$ **1p**

2.

Soluţie

Start **1p**

a) În integrala $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ facem substituţia $x = \sin\theta$ şi apoi $x = \cos\theta$, de unde rezultă $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$, respectiv $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ **2p**

Adunând cele două relaţii obţinem : $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin\theta)\cos\theta + f(\cos\theta)\sin\theta] d\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ **2p**

Rezultă $I \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ **1p**

b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **2p**

f satisface condiţiile din enunţ şi $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$ **2p**

3.

Soluţie

Start **1p**

Avem $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n + x + C} = g(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = (n + x + C)g(x)$ **2p**

Derivând: $f^{(n+1)}(x) = (n + x + C)g'(x) + g(x) = (n + 1 + x + C)g(x)$. Obţinem $g'(x) = g(x)$ **2p**

Rezultă $g(x) = ae^x \Rightarrow f'(x) = a(x + C + 1)e^x$ **1p**

Din condiţia $f'(0) = 1$ deducem : $a = \dfrac{1}{C+1}$ **1p**

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x+C}{C+1} \cdot e^x\,dx = C + e - 2$ **2p**

$C^2 = 3 - e \Rightarrow C = \sqrt{3-e}$ **1p**

4.

Soluţie

Start **1p**

Centrul $Z(R)$ este subinel al inelului R, rezultă că:

$xy+yx = (x+y)^2 - x^2 - y^2 = (x+y)^2 - f(x+y) + f(x) + f(y) - x^2 - y^2 = ((x+y)^2 - f(x+y)) - (x^2 - f(x)) - (y^2 - f(y)) \in Z(R)$ **3p**

Rezultă : $x(xy + yx) = (xy + yx)x$, $\forall x, y \in R \Leftrightarrow$ **1p**

$x^2y + xyx = xyx + yx^2 \Rightarrow x^2y = yx^2$, $\forall x, y \in R \Leftrightarrow x^2 \in Z(R), \forall x \in R$ **2p**

Cum $x^2 - f(x) \in Z(R) \Rightarrow f(x) = x^2 - (x^2 - f(x)) \in Z(R)$ **2p**

$R = \operatorname{Im} f \subseteq Z(R)$, rezultă inelul R este comutativ **1p**