Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”, ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a VI-a

Soluţii şi barem:

1. Câte numere $\overline{abc}$ au proprietatea că $a+b+c$ divide 2014?

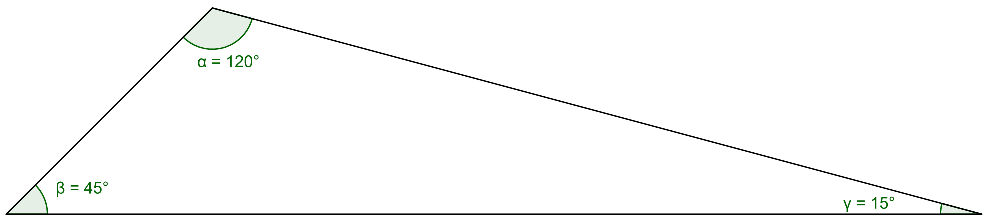
Soluţie
Start **1p**
Deoarece $a+b+c \leq 9+9+9=27$, iar singurii divizori ai lui $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ care sunt mai mici sau egali cu 27 sunt 1, 2 şi 19, rezultă că $a+b+c \in \{1,2,19\}$........................ **3p**
Cu $a+b+c=1$ există un singur număr, 100.. **1p**
Cu $a+b+c=2$ există 3 numere: 101, 110 şi 200.. **1p**
Cu $a+b+c=19$ avem: dacă $a=9$, b poate fi $1,2,\ldots 9$ (avem $\overline{abc} \in \{919,928,937,\ldots,991\}$), deci avem 9 variante; dacă $a=8$, atunci $\overline{abc} \in \{829,837,846,\ldots,892\}$, adică 8 variante; în general, pentru orice $a \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ vom avea a variante, deci în total, în acest caz, vor fi $0+1+2+\ldots+9=45$ de numere care au proprietatea din enunţ......................... **3p**
În concluzie, în total sunt $1+3+45=49$ de numere $\overline{abc}$ pentru care $a+b+c \mid 2014$...... **1p**

2. Spunem că un triunghi este ,,*aproape dreptunghic*” dacă măsura cel puţin unuia dintre unghiurile sale diferă de 90° cu cel mult 15°.
Spunem despre un triunghi că este ,,*aproape isoscel*” dacă are două unghiuri ale căror măsuri diferă prin cel mult 15°.
a) Este adevărat că orice triunghi ascuţitunghic este ,,*aproape dreptunghic*” sau ,,*aproape isoscel*”?
b) Desenaţi un triunghi care să nu fie nici ,,*aproape dreptunghic*”, nici ,,*aproape isoscel*”.

Turneul Oraşelor

Soluţie
Start **1p**
a) Fie $x \leq y \leq z$ măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic......................... **1p**
Dacă $75 \leq z < 90$, triunghiul este ,,aproape dreptunghic”.................................. **1p**
În caz contrar, $z < 75$. Dacă $y \geq 60$, atunci $0 \leq z-y < 15$, deci triunghiul este ,,aproape isoscel”.. **2p**
Dacă $y < 60$ şi $z < 75$, atunci $x = 180-y-z > 180-60-75 = 45$, deci $0 \leq y-x < 60-45 = 15$, prin urmare şi în acest caz triunghiul este ,,aproape isoscel”............................ **2p**
În concluzie, orice triunghi ascuţitunghic este ,,aproape dreptunghic” sau ,,aproape isoscel”.

b) Conform punctului **a)**, triunghiul trebuie să fie obtuzunghic. Trebuie ca măsura unghiului obtuz să fie mai mare ca $105°$, iar unghiurile să difere prin mai mult de $15°$. De exemplu, un triunghi cu unghiurile de măsuri $120°$, $45°$, $15°$ nu este nici ,,aproape dreptunghic", nici ,,aproape isoscel". (Sunt multe alte alegeri posibile ale măsurilor unghiurilor pentru ca triunghiul să nu fie nici ,,aproape dreptunghic", nici ,,aproape isoscel".)
Pentru orice desen corect **3p**



Remarcă: Această problemă arată de ce, în practică, atunci când încercăm să desenăm un triunghi ascuţitunghic oarecare, ni se pare mereu că acesta ne-a ,,ieşit" ,,aproape dreptunghic" sau ,,aproape isoscel".

3. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele P, Q şi R, S astfel încât

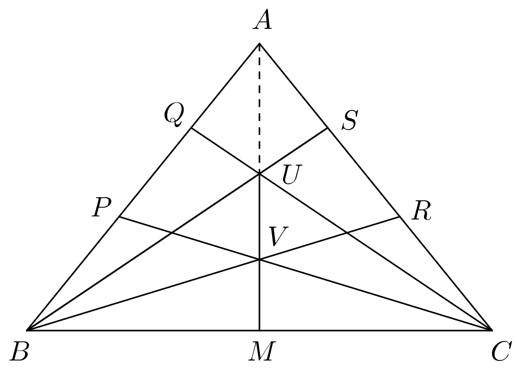
$$m(\angle BCP) = m(\angle PCQ) = m(\angle QCA) \text{ şi}$$

$$m(\angle CBR) = m(\angle RBS) = m(\angle SBA).$$

Notăm cu U intersecţia dreptelor BS şi CQ, iar cu V intersecţia dreptelor BR şi CP.
Demonstraţi că dacă $UV \perp BC$, atunci:
a) UV este mediatoarea segmentului $[BC]$,
b) $[AU$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

Dorel Miheţ

Soluţie
Start **1p**
a) Notăm cu M intersecţia drepelor UV şi BC. Observăm că V este punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor B şi C ale triunghiului BCU, deci $[UV$ este bisectoarea unghiului U (deoarece, într-un triunghi, bisectoarele sunt concurente). **2p**
Atunci triunghiurile BUM şi CUM sunt congruente (CU), deci $BM = CM$ (sau, folosind proprietăţile triunghiurilor isoscele: fiind bisectoare şi înălţime, (UM) este şi mediană) **2p**
b) Din congruenţa de triunghiuri demonstrată mai sus deducem că $BU = CU$ şi $\angle UBM \equiv \angle UCM$. Rezultă de aici că $m(\angle VBM) = \frac{1}{2}m(\angle UBM) = \frac{1}{2}m(\angle UCM) = m(\angle VCM)$, deci şi $m(\angle ABU) = m(\angle ACU)$. **2p**
Rezultă că triunghiurile ABU şi ACU sunt congruente (LUL), deci $\angle BAU \equiv \angle CAU$, adică $(AU$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$ **2p**



4. Stabiliţi dacă există numere de 10 cifre, diferite două câte două, care au proprietatea că oricum am şterge 6 dintre cifrele numărului, numărul de 4 cifre care rămâne este compus.

Soluţie

Start **1p**

Da, există. Să alegem un număr ale cărui ultime 6 cifre să fie (indiferent în ce ordine) $0, 2, 4, 6, 8, 5$. **3p**

În afara cazului în care ştergem chiar ultimele şase cifre, numărul rămas va avea drept ultimă cifră una din cifrele alese mai sus, deci va fi fie un număr divizibil cu 2 (şi mai mare ca 2), fie un număr divizibil cu 5 (şi mai mare ca 5), deci un număr compus. **2p**

Primele 4 cifre ale numărului, $1, 3, 7, 9$, vor trebui aranjate astfel încât în cazul rămas, acela în care cele 6 cifre şterse sunt chiar ultimele 6, numărul de 4 cifre obţinut să fie şi el compus. Şi aici sunt multe variante. Vom indica doar două: 1379 (căci $1379 = 7 \cdot 197$ este număr compus) şi 1397 (se vede din criteriul de divizibilitate cu 11 că este număr compus).

În concluzie, există numere cu proprietatea din enunţ, de exemplu numărul 1379024685.... **4p**