Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a VII-a

1. a) Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul $n^4 + n^2 + 1$ este prim.

b) Demonstraţi că numărul

$$A = \frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)...(100^4+100^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(99^4+99^2+1)}$$

este natural.

Olimpiadă Brazilia

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) $n^4+n^2+1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$ este prim dacă şi numai dacă $n^2-n+1 = 1$ sau $n^2+n+1 = 1$. Rezultă $n \in \{-1, 0, 1\}$; convine doar $n = 1$. **(4p)**

b) $A = \dfrac{(2^2-2+1)(2^2+2+1)\cdot \ldots \cdot (100^2-100+1)(100^2+100+1)}{(1^2-1+1)(1^2+1+1)\cdot \ldots \cdot (99^2-99+1)(99^2+99+1)}$ .... **(1p)**

Dar $(2k)^2 - 2k + 1 = (2k-1)^2 + (2k-1) + 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ .... **(2p)**

Rezultă că $A = \dfrac{100^2+100+1}{1^2-1+1} = 10101 \in \mathbb{N}$ .... **(2p)**

2. Se consideră mulţimea A a tuturor tripletelor de numere naturale (x, y, z) cu proprietatea că x, y, z, $x+y-z$, $z+x-y$, $y+z-x$, $x+y+z$ sunt 7 numere prime distincte, iar $x+y = 800$ (un exemplu de astfel de triplet este $(13, 787, 797)$).

Pentru fiecare $(x, y, z) \in A$ se face diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre cele 7 numere prime. Care este cea mai mare valoare pe care o poate avea această diferenţă?

Olimpiadă Rusia (enunţ adaptat)

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**

Se verifică imediat că dacă $(x, y, z) \in A$, atunci x, y, z sunt impare, deci cel mai mic dintre cele 7 numere este cel puţin 3. . . . . **(2p)**

Cel mai mare număr este $x+y+z = 800+z$. Ştim de asemenea că $x+y-z = 800-z$ este prim impar, deci $800 - z \geq 3$, adică $z \leq 797$. . . . . **(3p)**

Prin urmare $x+y+z \leq 1597$, de unde deducem că diferenţa poate fi cel mult $1597-3 = 1594$. . . . . **(2p)**

Pentru tripletul dat în exemplul din enunţ cele 7 numere sunt 13, 787, 797, 3, 23, 1571, 1597. Diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr este 1594, în consecinţă, aceasta este valoarea maximă căutată. . . . . **(2p)**

3. Demonstraţi că diagonalele unui trapez sunt perpendiculare dacă şi numai dacă segmentul care uneşte mijloacele bazelor are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**

Considerăm că $AB||CD$. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Atunci $MNPQ$ este paralelogram, cu $MN \parallel AC$ şi $MQ \parallel BD$. **(3p)**

Diagonala $[QN]$ a acestui paralelogram are lungimea $\frac{AB+CD}{2}$. . . . . **(1p)**

$MNPQ$ este dreptunghi dacă şi numai dacă are diagonalele congruente, adică dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ . . . . **(3p)**

Rezultă că $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ . . . . **(2p)**

Variantă

Ducem prin C paralela la DB. Fie E intersecţia acestei paralele cu AB. . . . . . . **(1p)**

Fie $F \in AB$ astfel încât $MF = PC$. Atunci $MPCF$ este paralelogram, deci $MP = CF$. . . . . **(2p)**

Cum $AF = AM + MF = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AE}{2}$, rezultă că CF este mediană în triunghiul ACE. . . . . **(3p)**

$\triangle ACE$ este dreptunghic dacă şi numai dacă $CF = \frac{AE}{2}$ . . . . **(2p)**

Prin urmare, $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{AB+CD}{2}$ . . . . **(1p)**

4. Se ştie că M şi N sunt respectiv mijloacele laturilor $[DC]$ şi $[BC]$ ale rombului $ABCD$, iar $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAD})$.

a) Aflaţi $m(\widehat{ABC})$.

b) Demonstraţi că pentru orice puncte $U \in [DC], V \in [BC]$ astfel încât $BV = CU$ are loc egalitatea

$$m(\widehat{UAV}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAD}).$$

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) $\triangle ADM \equiv \triangle ABN$ (LUL), deci $\widehat{DAM} \equiv \widehat{BAN}$. .... **(1p)**

Deoarece $[AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, rezultă că $[AC$ este şi bisectoarea unghiului $\widehat{MAN}$. .... **(1p)**

Notând $\alpha = m(\widehat{CAM})$ şi $\beta = m(\widehat{DAM})$, din ipoteză rezultă că $2\alpha + 2\beta = 4\alpha$, deci $[AN]$ este bisectoare şi mediană în $\triangle BAC$. Rezultă că $AB = AC$, deci triunghiul ABC este echilateral.

Prin urmare $m(\widehat{ABC}) = 60°$. .... **(3p)**

b) Trebuie să arătăm că dacă $ABCD$ este romb cu $m(\widehat{BAD}) = 120°$, iar $U \in [DC], V \in [BC]$ sunt astfel încât $BV = CU$, atunci $m(\widehat{UAV}) = 60°$.

Din $BV = CU$ şi $\triangle DAC$ echilateral rezultă $\triangle ADU \equiv \triangle ACV$ (LUL), deci $m(\widehat{DAU}) = m(\widehat{CAV})$. .... **(2p)**

Deducem că $\widehat{UAV} \equiv \widehat{DAC}$, deci $m(\widehat{UAV}) = 60°$. .... **(2p)**