Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie-2014

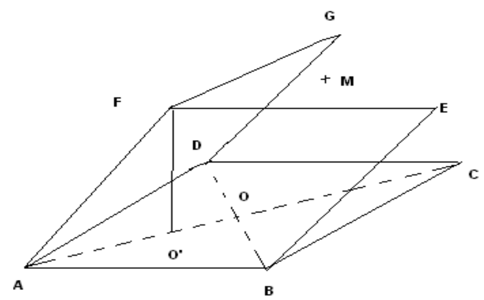
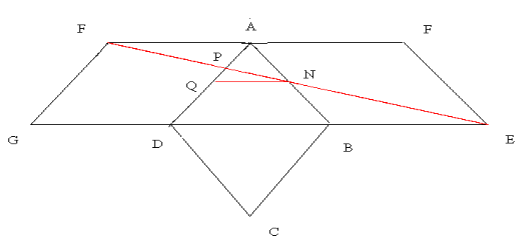
Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	Din existenţa $[a,b]\subset\mathbb{R}\Rightarrow a\le b\Rightarrow a-b\le 0\Rightarrow$ $a-b-2<0\Rightarrow\lvert a-b-2\rvert=b-a+2;$	**2p**
	$\lvert a-b-2\rvert-a^2=\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\Rightarrow b-a+2-a^2=\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\Leftrightarrow$ $a^2+a+b^2-\frac{4}{3}b+\frac{25}{36}=0\Leftrightarrow$	**2p**
	$a^2+a+\frac{1}{4}+b^2-\frac{4}{3}b+\frac{4}{9}=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{2}{3}\right)^2=0\Rightarrow$ $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow[a,b]=\left[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$	**3p**
2.	$\lvert a^2\cdot(b-c)+b^2\cdot(c-a)+c^2\cdot(a-b)\rvert=\frac{2014}{2013}\cdot\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\rvert\Leftrightarrow$ $\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\rvert=\frac{2014}{2013}\cdot\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\rvert\Rightarrow$	**3p**
	$a=b$ sau $b=c$ sau $a=c$; Dacă $a=b\Rightarrow A_{\triangle VBC}=A_{\triangle VAC}$; $\begin{cases}[BC]\equiv[AC]\\ A_{\triangle VBC}=A_{\triangle VAC}\end{cases}\Rightarrow d(V,BC)=d(V,AC)$; Fie $VM\perp BC$, $M\in(BC)$; $VN\perp AC, N\in(AC)$; Asadar $[VM]\equiv[VN]$	**2p**

	Fie $\text{pr}_{(ABC)}V=O \Rightarrow VO\perp(ABC)$ $\left.\begin{array}{l} VO\perp(ABC) \\ VM\perp BC \\ BC\subset(ABC)\end{array}\right\} \overset{R_1.T.3\perp}{\Rightarrow} OM\perp BC;$ Analog ON $\perp$ AC $\left.\begin{array}{l} d(V,BC)=d(V,AC) \\ \text{pr}_{(ABC)}V=O\end{array}\right\} \Rightarrow d(O,BC)=d(O,AC) \Rightarrow O\in$ bisectoarei $\measuredangle ACB$ Analog se demonstrează în cazul b=c sau a=c.	**2p**
3.	Folosim inegalitatea mediilor: $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),(\forall)a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$	**2p**
	Analog $\frac{1}{c+b}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right);\ \frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right);$ Adunând cele trei inegalităţi, obţinem: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);$ Dar $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=ab+ac+cb;$	**2p**
	Să demonstrăm că $ab+ac+cb\leq a^2+b^2+c^2;$ Demonstraţie: $ab+ac+cb\leq a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 2\cdot(ab+ac+cb)\leq 2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0(A),\left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*\right);$	**2p**
	Atunci $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right),$ ceea ce trebuia demonstrat.	**1p**

<table>
<tr><td rowspan="3">4.</td><td>Figura este următoarea:
</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Din
$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AB \\ FG \parallel AD \\ EF \cap FG = \{F\} \\ AB \cap AD = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow (FGE) \parallel (ABCD) \Rightarrow d[M,(BCD)] = d[F,(ABC)]$$
$\triangle AFB, \triangle ABD, \triangle ADF$ sunt echilaterale. $\Rightarrow$ $AFDB$ tetraedru regulat. Fie
$FO' \perp (ABC) \Rightarrow O'$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABD$ şi avem
$AO' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
In
$\triangle AFO' \overset{T.P.}{\Rightarrow} FO'^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} => FO' = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d[M,(BCD)] = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>b) Desfăşurarea în plan este
</td><td>1p</td></tr>
</table>

	Pentru ca suma să fie minimă trebuie ca punctele $E,\ N,\ P,\ F$ să fie coliniare. Ducem $NQ \parallel BD, Q \in [AB]$. Avem $\triangle BNE \equiv \triangle ANF \overset{U.L.U}{\Rightarrow} [AN] \equiv [NB]$ şi $[NQ]$ linie mijlocie în $\triangle ABD$. $\triangle PNQ \sim \triangle PFA \Rightarrow \frac{PN}{PF} = \frac{NQ}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow PF = 2 \cdot NP$ De asemenea, $\triangle PQN \sim \triangle PDE \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \frac{PN}{PE} = \frac{QN}{DE} = \frac{1}{4} \Rightarrow EN = 3 \cdot NP$. Deci $\frac{EN+PF}{NP} = \frac{3 \cdot NP + 2 \cdot NP}{NP} = \frac{5 \cdot NP}{NP} = 5.$	**2p**