Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

BAREM

Clasa a VIII-a

1. Start 1p
Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$ şi inegalitatea din problemă este verificată 1p
Dacă $a > 1$, atunci din $a^3(a-1)(a^{18}+\ldots+a+1) = b^3(1-b)(b^{18}+\ldots+b+1)$ rezultă $b < 1$ şi de aici $a > b$ (cazul $a < 1$ se va trata analog) 1p
Din egalitatea precedentă rezultă şi

$$\frac{a^3(a-1)}{b^3(1-b)} = \frac{b^{18}+\ldots+b+1}{a^{18}+\ldots+a+1} \qquad \ldots \quad 2p$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent

$$\frac{a^{2014}-a^{2013}}{b^{2013}-b^{2014}} = \frac{a^{2010}}{b^{2010}} \cdot \frac{a^3(a-1)}{b^3(1-b)} \geq 1 \qquad \ldots \quad 2p$$

Aceasta este echivalentă cu

$$a^{2010}(b^{18}+\ldots+b+1) \geq b^{2010}(a^{18}+\ldots+a+1) \qquad \ldots \quad 1p$$

care se obţine prin însumarea unor inegalităţi evidente de forma $a^n b^m \geq a^m b^n$ cu $n > m$, care sunt adevărate fiind echivalente cu $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} \geq 1$ şi ţinând cont de $a > b$ 2p

2. Start 1p
Se verifică cu teorema medianei identitatea din (a) 3p
Din ipoteză rezultă că feţele tetraedrului sunt triunghiuri congruente, deci este suficient să verificăm afirmaţia pentru una dintre feţele tetraedrului 1p
Vom arăta, de exemplu, că $\widehat{BAC}$ este ascuţit; din teorema cosinusului este suficient să arătăm că $2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2 > 0$ 2p
Din identitatea lui Euler şi congruenţa muchiilor opuse în tetraedru rezultă

$$0 < 4MN^2 = AB^2+CD^2+AC^2+BD^2-(BC^2+AD^2) = 2(AB^2+AC^2-BC^2),$$

(M şi N nu pot coincide deoarece $M = N$ ar conduce la coplanaritatea punctelor A, B, C, D); obţinem concluzia 3p
Soluţie alternativă pentru (b)
Se consideră mijlocul M al lui (BC). Din inegalitatea triunghiului $MA+MD >$

$AD = BC = 2MC$ 2p
Avem însă $MA = MD$ (din congruenţa triunghiurilor ABC şi DCB) 1p
Se obţine $MD > MC$ 1p
Rezultă că MD este strict mai mare decât raza cercului de diametru $[BC]$ din planul (BCD), astfel că M este situat în exteriorul acestui cerc, ceea ce conduce la concluzia că unghiul $\widehat{BDC}$ este ascuţit 2p

3. Start 1p
Se verifică prin calcul direct (a) 1p
Avem egalităţile $\dfrac{yz}{x} = k - m, \dfrac{zx}{y} = k - n, \dfrac{xy}{z} = k - p$, unde s-a notat cu k valoarea comună a expresiilor $m + \dfrac{yz}{x}, n + \dfrac{zx}{y}, p + \dfrac{xy}{z}$ 2p
Atunci $xyz = (m + n + p) - mnp = \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} = (k - m)(k - n)(k - p)$ ... 2p
Rezultă $k^3 - (m+n+p)k^2 + (mn+np+pm)k - mnp = (m+n+p) - mnp$, de unde rezultă, utilizând ipoteza $mn+np+pm = 1$, că avem $(k^2+1)(k-(m+n+p)) = 0$, ceea ce conduce la $k = m + n + p$ 2p
Obţinem $\dfrac{yz}{x} = n + p, \dfrac{zx}{y} = p + m, \dfrac{xy}{z} = m + n$, de unde, prin înmulţirea două câte două a acestor egalităţi şi ţinând cont de faptul că printre numerele x, y, z nu pot fi exact unul sau exact trei negative, rezultă soluţiile:
$(x = \sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = \sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = \sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = -\sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = -\sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = \sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = -\sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = \sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = -\sqrt{(n+p)(p+m)})$;
$(x = \sqrt{(m+n)(p+m)},\ y = -\sqrt{(m+n)(n+p)},\ z = -\sqrt{(n+p)(p+m)})$. 2p

4. Start 1p
Notăm pentru simplificare $BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, BD = e, CD = f$. Din ipoteză şi teorema cosinusului rezultă egalităţile

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + f^2 - d^2}{2bf};\ \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2ce} = \frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef} \qquad ...\ 2p$$

sau echivalent

$$f(b^2+c^2-a^2) - c(b^2+f^2-d^2) = 0;\ f(c^2+e^2-d^2) - c(e^2+f^2-a^2) = 0 \ ...\ 1p$$

Prin adunarea acestor două egalităţi şi factorizare rezultă

$$(c - f)(a^2 + d^2 + 2cf - b^2 - e^2) = 0 \qquad ...\ 2p$$

Presupunem că avem $a^2 + d^2 + 2cf - b^2 - e^2 = 0$; dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $(BC), (AD), (AC)$ din relaţia lui Euler obţinem $b^2 + e^2 + c^2 + f^2 = a^2 + d^2 + 4MN^2$, ceea ce împreună cu egalitatea anterioară conduce la $MN = \frac{c+f}{2}$ 2p
Aceasta conduce la contradicţie, pentru că triunghiul MNP ar fi degenerat ($MP = \frac{c}{2}, NP = \frac{f}{2}$ din linii mijlocii). Rezultă concluzia $c = f$ 2p