Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie-2014

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Fie q raţia progresiei geometrice Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică crescătoare $\Bigg\} \Rightarrow q \geq 1$	**2p**
	$b_{2n+2} - b_1 \geq (2n+1)\cdot(b_{n+2} - b_{n+1}) \Leftrightarrow b_1 \cdot q^{2n+1} - b_1 \geq (2n+1)\cdot(b_1\cdot q^{n+1} - b_1\cdot q^n)$; Şirul este crescător, deci $q \geq 1$. Dacă $q = 1$, inegalitatea este adevarată. În cazul q>1, inegalitatea devine: $q^{2n+1} - 1 \geq (2n+1)\cdot q^n \cdot (q-1) \Leftrightarrow 1 + q + q^2 + ... + q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$, $n \geq 1$.	**3p**
	Demonstrăm prin inducţie matematică: $1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$, $n\geq 1$ $I. P(1): 1+q+q^2 \geq 3\cdot q \Leftrightarrow 1-2q+q^2 \geq 0 \Leftrightarrow (q-1)^2 \geq 0 \quad (A)$ $II.$ Demonstrăm că $P(n) \to P(n+1), \forall n \geq 1$; Presupunem $P(n): 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n \quad (A)$ Să demonstrăm că $P(n+1)$: $1+q+q^2+...+q^{2n}+q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+3)\cdot q^{n+1}$ este adevărată. Din $P(n) \Rightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n}+q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+1)\cdot q^n + q^{2n+1}+q^{2n+2} \ (A)$ $(2n+1)\cdot q^n + q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+3)\cdot q^{n+1} \Rightarrow (2n+1)+q^{n+1}+q^{n+2} \geq (2n+3)\cdot q^1 \Rightarrow$ $q^{n+1}-q+q^{n+2}-q \geq (2n+1)\cdot(q-1) \overset{:(q-1)}{\Rightarrow} q\cdot(1+q+q^2+...+q^{n-1})+q\cdot(1+q+q^2+...+q^n) \geq (2n+1) \Rightarrow$ $2\cdot(q+q^2+...+q^n)+q^{n+1} \geq (2n+1)$ adevărat pentru $q \geq 1 \Rightarrow P(n+1)$ adevărat $\Rightarrow$ $P(n)$ adevărat, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.	**2p**
	Metoda II: Aplicând inegalitatea mediilor $\Rightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot \sqrt[2n+1]{1\cdot q\cdot q^2\cdot q^3\cdot ...\cdot q^{2n}} \Leftrightarrow$ $1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\sqrt[2n+1]{q^{\frac{2n(2n+1)}{2}}} \Leftrightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$.	

2.	Fie punctul P mijlocul segmentului $[MN]$ şi Q mijlocul segmentului $[BC]$; $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CN}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}\right)$;	**2p**
	Fie E$\in(AB)$, astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{EA}$; Fie F$\in(CA)$, astfel încât $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{FA}$; Atunci $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}\right)$;	**3p**
	Dar $\lvert\overrightarrow{BM}\rvert=\lvert\overrightarrow{CN}\rvert\Rightarrow\lvert\overrightarrow{EA}\rvert=\lvert\overrightarrow{FA}\rvert\Rightarrow\triangle AEF$ este isoscel ; Fie $[AT]$ mediana în $\triangle AEF$ isoscel $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\overrightarrow{PQ}\\ [AT-\text{bisectoarea }\measuredangle EAF\end{cases}\Rightarrow PQ\parallel AT$	**2p**
3.	Fie $E(n)=\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]$; 1. $n=2k,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow E(2k)=\left[2k^2\right]+\left[\frac{(2k+1)^2}{2}\right]=\left[2k^2\right]+\left[2k^2+2k+\frac{1}{2}\right]=$ $=4k^2+2k=2k\cdot(2k+1)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1)\quad(1)$	**3p**
	2. $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow E(2k+1)=\left[\frac{(2k+1)^2}{2}\right]+\left[2k^2+4k+2\right]=$ $\left[2k^2+2k+\frac{1}{2}\right]+\left[2k^2+4k+2\right]=$ $4k^2+6k+2=(2k+1)\cdot(2k+2)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1)\quad(2)$ Din (1) şi $(2)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1)$, $(\forall)$n$\in\mathbb{N}$;	**2p**
	$n<\sqrt{n\cdot(n+1)}<\frac{2n+1}{2}<n+1\ \Rightarrow\left\{\sqrt{n\cdot(n+1)}\right\}<\frac{1}{2}\Rightarrow$ inecuaţia nu are soluţii.	**2p**
4.	Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice relaţia din stânga: I. Verificare pentru $n=2$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\Leftrightarrow$ $(1+x_1)\cdot(1+x_2)(1+x_1\cdot x_2)+2(1+x_1)\cdot(1+x_2)\le 2\cdot(1+x_1\cdot x_2)\cdot(2+x_1+x_2)\Leftrightarrow$ $1-x_1-x_2+x_1^2\cdot x_2+x_2^2\cdot x_1-x_1^2\cdot x_2^2\ge 0\Leftrightarrow$ $(1-x_1)\cdot(1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)\ge 0(A),(\forall)x_1,x_2\in[0,1]$;	**2p**

	II. Presupunem relaţia adevărată pentru n şi să demonstrăm că este adevărată pentru n+1: $\frac{n}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}}(2)$ Din $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}\le\frac{1}{1+x_{n+1}}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$ şi $\frac{n-1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}\Rightarrow$ prin adunarea lor (2), conform inducţiei matematice, relaţia este demonstrată.	**3p**
	La fel se demonstrează partea dreaptă a relaţiei. Pentru $n=2$: $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\le 1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow$ $(2+x_1+x_2)\cdot(1+x_1\cdot x_2)\le(2+x_1\cdot x_2)\cdot(1+x_1+x_2+x_1\cdot x_2)\Leftrightarrow$ $x_1+x_2+x_1\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2\ge 0(A),(\forall)x,y\in[0,1]$.	**1p**
	Presupunem relaţia adevărată pentru n şi să demonstrăm că este adevărată pentru n+1: $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}}\le n+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}(3)$ Dar $\frac{1}{1+x_{n+1}}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le 1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}$ si şi din $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}\le n-1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}(A)\Rightarrow$ prin adunarea lor (3).	**1p**