Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Traian Lalescu”, ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a IX-a

Soluţii şi barem:

1. Prima soluţie: Utilizăm inducţia “cu dublă ipoteză”.
   Calculăm întâi $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2$ şi $a_4 = \frac{a_3^2}{a_2} = 4$. (2 puncte)
   Presupunem că pentru $k \in \mathbf{N}^*$ avem $a_{2k} = k^2$ şi $a_{2k+2} = (k+1)^2$. Termenul a_{2k+1} este media geometrică a acestora, adică

   $$a_{2k+1} = \sqrt{a_{2k}a_{2k+2}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1)\ .\ \text{(2 puncte)}$$

   Termenii $a_{2k+1}, a_{2k+2}, a_{2k+3}$ sunt în progresie aritmetică, deci

   $$a_{2k+3} = 2a_{2k+2} - a_{2k+1} = 2(k+1)^2 - k(k+1) = (k+1)(k+2)\ .\ \text{(2 puncte)}$$

   Termenii $a_{2k+2}, a_{2k+3}, a_{2k+4}$ sunt în progresie geometrică, deci

   $$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3}^2}{a_{2k+2}} = \frac{[(k+1)(k+2)]^2}{(k+1)^2} = (k+2)^2\ .\ \text{(2 puncte)}$$

   Am demonstrat astfel că $a_2 = 1^2,\ a_4 = 2^2$ şi că implicaţia

   $$a_{2k} = k^2 \quad \text{şi} \quad a_{2(k+1)} = (k+1)^2 \Rightarrow a_{2(k+2)} = (k+2)^2\ ,$$

   e valabilă pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$. Inducţia este încheiată şi rezultă
   $a_{2n} = n^2\ \forall n \in \mathbf{N}^*$. (1 punct)

   Soluţia a 2-a: Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ propoziţia

   $$\mathrm{P(n)}: \qquad a_{2n-1} = n(n-1) \quad \text{şi} \quad a_{2n} = n^2$$

   este adevărată.
   Conform cu ipotezele $a_1 = 0$ şi $a_2 = 1$, $P(1)$ se verifică. (3 puncte)
   Presupunem acum că $P(k)$ este adevărată pentru o valoare $k \in \mathbf{N}^*$. Avem

   $$a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2k^2 - k(k-1) = k(k+1)$$

   şi, în consecinţă

   $$a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{[k(k+1)]^2}{k^2} = (k+1)^2\ ,$$

   deci şi $P(k+1)$ este adevărată. (5 puncte)
   Inducţia este încheiată. Rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. (1 punct)

2. a) Putem scrie

$$|x| \leq [z] \leq z = -x + (x+z) \leq |-x| + (x+z) = |x| + (x+z) \ .$$

Rezultă $x + z \geq 0$. (3 puncte)
b) Dacă $x + z = 0$, atunci toate inegalităţile de mai sus devin egalităţi, adică

$$|x| = [z] = z = -x \ ,$$

de unde rezultă $z \in \mathbf{N}$ şi $x = -z$. (2 puncte)
Inegalităţile din enunţ devin

$$z \leq \{y\} \leq [z] = z \ ,$$

deci $z = \{y\} \in \mathbf{N} \cap [0,1) = \{0\}$. Obţinem $x = z = 0$ şi $y \in \mathbf{Z}$. (2 puncte)
Reciproc, dacă $x = z = 0$ şi $y \in \mathbf{Z}$ relaţiile din enunţ sunt satisfăcute. (2 puncte)

3. Prima soluţie: Inegalitatea din enunţ se mai poate scrie sub forma

$$\left(z - \frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0 \ ,$$

evident adevărată. (6 puncte)
Egalitatea are loc pentru x arbitrar, $y = \frac{3x}{2}$, $z = \frac{x}{2}$, adică pentru toate tripletele de numere reale proporţionale cu $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (3 puncte)

A doua soluţie: Pentru $x = 0$ inegalitatea se reduce la

$$\frac{1}{3}y^2 + z^2 \geq 0 \ ,$$

egalitatea având loc pentru $y = z = 0 (= x)$. (1 punct)
Dacă $x \neq 0$, împărţind la x^2 inegalitatea din enunţ şi notând $\frac{y}{x} = a$, $\frac{z}{x} = b$ rămâne să demonstrăm că

$$1 + \frac{1}{3}a^2 + b^2 \geq a + b \ ,$$

ceea ce se reduce la

$$\frac{1}{3}\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ . \text{ (5 puncte)}$$

Egalitatea are loc pentru $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. (1 punct)
Revenind la substituţie şi adăugând şi cazul trivial ($x = y = z = 0$), rezultă că egalitatea are loc dacă şi numai dacă tripletul (x, y, z) este proporţional cu tripletul $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (2 punct)

4. Din ipoteza $\frac{PM}{AM} = m$ obţinem $\frac{AP}{PM} = \frac{1-m}{m}$ (1 punct) şi deci

$$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{m}\overrightarrow{BM}}{1 + \frac{1-m}{m}} = m\overrightarrow{BA} + (1-m)\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (2 puncte)}$$

Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}\ .\ (1\ \text{punct})$$

Ipoteza $\frac{BP}{BN} = n$ devine

$$m\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{n}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{n}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{2}\overrightarrow{BC} \quad (*)$$

Dacă patrulaterul este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi relaţia $(*)$ se transformă în

$$\left(m - \frac{n}{2}\right)\overrightarrow{BA} = \left(n - \frac{1-m}{2}\right)\overrightarrow{BC}\ .\ (1\ \text{punct})$$

m şi n trebuie să satisfacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} m - \frac{n}{2} & = & 0 \\ n - \frac{1-m}{2} & = & 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $m = \frac{1}{5},\ n = \frac{2}{5}$. (1 punct)
Reciproc, dacă introducem valorile $m = \frac{1}{5},\ n = \frac{2}{5}$ în relaţia $(*)$ obţinem $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi deci patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram. (3 puncte)