Barem clasa a X-a
(OLM 2014-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

Avem $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ şi ecuaţia devine $\left(5 \cdot 49^{\frac{1}{3x+3}}\right)^{3x+1} = 5^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 5^{3x-1} \cdot 7^{\frac{3x-1}{3x+3}} = 1 \Leftrightarrow (3x-1) \cdot \left(\lg 5 + \frac{\lg 7}{3x+3}\right) = 0$.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = \left\{\frac{1}{3}, -1 - \frac{1}{3}\log_5 7\right\}$. **(30p)**

Subiectul II.

Fie O originea unui reper cartezian din plan şi M_1, M_2, M_3 imaginile numerelor z_1, z_2 şi respectiv z_3.
Din condiţia $|z_1| = |z_2| = |z_3| =$ r rezultă că punctele M_1, M_2 şi M_3 aparţin cercului de centru O şi rază r. Fie acum, $M(z_1 + z_2)$ imaginea lui $z_1 + z_2$. Cum $z_1 + z_2 = - z_3$, rezultă că afixul lui M este $- z_3$, deci M şi M_3 sunt diametral opuse pe cerc.
Pe de altă parte $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ şi astfel OM_1MM_2 este paralelogram cu $OM_1 = OM_2 = OM = r$, deci OM_1MM_2 este romb cu o diagonală egală cu latura. Astfel, unghiul M_1OM_2 are 120^0 şi apoi unghiurile M_1OM_3 şi M_2OM_3 au tot 120^0.
Triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral şi rezultă ca $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2|$. **(20p)**

Subiectul III.

a) Fie $y = \log_9\left(1 + x^2 + x^3\right) = 2\log_4 x \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2^y \\ 1 + x^2 + x^3 = 9^y \end{cases}\right\} \Rightarrow 1 + 4^y + 8^y = 9^y \Rightarrow y = 2$ soluţie unică

Deci $x = 4$ **(10p)**

b) $x = \pm 2$ **(10p)**

Subiectul IV.

a) Avem $AB = BC = AC = \sqrt{3}$. Punctele se află pe cercul unitate. **(10p)**

b) Considerând punctul $M\left(x, \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)$, inegalitatea din enunţ, se scrie $MA + MB \geq MC$.

Cum triunghiul *ABC* este echilateral, folosind Teorema lui Pompeiu, avem că pentru orice punct din planul triunghiului *ABC*, care nu aparţine cercului circumscris triunghiului, se poate construi un triunghi cu segmentele *MA*, *MB* şi *MC,* deci avem inegalitatea $MA + MB \geq MC$. Dacă *M* se află pe cercul circumscris, atunci suma a două dintre segmentele *MA*, *MB*, *MC* este egală cu al treilea segment. În cazul nostru avem egalitate pentru *M* situat pe arcul mic *AB*. Dar punctul $M\left(x, \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)$ aparţine graficului funcţiei $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, deci punctele pentru care avem egalitate sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \end{cases}$. Acestea sunt $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$. **(10p)**