Barem clasa a XI-a
(OLM 2014-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) Calcul direct **(10p)**

b) $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n & nc + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in N^*$ **(10p)**

c) Fie X o soluție, $X^4 = AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b, c \in C$

$\Rightarrow \det X^3 = \det A \Rightarrow (\det X)^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^3 = O_3 \neq A$ **(10p)**

Subiectul II.

a) Demonstrăm prima inegalitate; Folosim inegalitatea mediilor şi avem :

$\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)} < \frac{2k+2k+1}{2} + \frac{2k-1+2k+2}{2} = 4k+1$. Deci, prima inegalitate este demonstrată.

Urmează a doua inegalitate: $\frac{2}{\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)}} < 1$;

$\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)} > 2$. Cum $k \in N^*$, rezultă $\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)} \geq \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{1 \cdot 4} > 2$. **(10p)**

b) Însumăm după k inegalitățile de la punctul a) şi obținem:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) < a_n < n$. Trecând la limită după n se obține $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. **(10p)**

Subiectul III.

Se arată imediat , prin inducție , că : $\underbrace{(fofo\ldots of)}_{k\text{ ori}}(tgx) = tg2^k x, \ (\forall)\ k \in N^*$. **(10p)**

Atunci obținem:

a) $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \prod_{k=1}^{n} tg2^k x = \lim_{x\to 0} \prod_{k=1}^{n} \frac{tg2^k x}{2^k x} \cdot \prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

(5p)

b) $L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + tg2^k x) = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1 + tg2^k x)}{tg2^k x} \cdot \frac{tg2^k x}{2^k x} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$.

(5p)

Subiectul IV.

a) $\det(A \cdot B^t) = 2(2-a)^2(3-a)^2$ **(10p)**

b) $\begin{pmatrix} (x^2+1)^2 & (xy+1)^2 & (xz+1)^2 \\ (xy+1)^2 & (y^2+1)^2 & (yz+1)^2 \\ (xz+1)^2 & (yz+1)^2 & (z^2+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = 2(z-x)^2(z-y)^2(y-x)^2$

(10p)