Barem clasa a XII-a
(OLM 2014-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) Arătăm mai întâi că $ab^2 = b^2 a$.

Avem: $ab^2 = abaa^{-1}b = ba^2ba^{-1}b = (ba^2)(ba^{-1}b) = ba^2(ba^2b) = (ba^2)(aba) = ba^3ba = b^2a$. Am folosit că $a^3 = e$. **(15p)**

b) Demonstrăm acum că $ab^{2014} = b^{2014}a$.

Avem succesiv:

$ab^{2014} = a(b^2)^{1007} = a\cdot b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2 = b^2\cdot a\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2 = b^2\cdot b^2\cdot a\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2 = \cdots = b^2\cdot b^2\cdot\ldots\cdot b^2\cdot a =$

$= (b^2)^{1007}\cdot a = b^{2014}\cdot a$. Folosind că $b^{2014} = b$, avem $ab = ba \Rightarrow aba = ba^2$. Dar $aba = ba^2b$, deci $ba^2 = ba^2b$ şi simplificând la stânga cu ba^2, obținem $b = e$. **(5p)**

Subiectul II.

a) $\forall f_a, f_b \in G \Rightarrow (f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = abx + 3 - 3ab = f_{ab}(x), \forall x \in R \Rightarrow f_a \circ f_b = f_{ab} \in G$ **(15p)**

b) Elementul neutru este $f_1 \in G$, simetricul elementului $f_a \in g$ este $f_{\frac{1}{a}} \in G$, $\circ$ este asociativă **(15p)**

c) Pentru $a = 1, f_1(x) = x$ are ordinul 1. Pentru $a \neq 1, f_a^{(n)}(x) = a^n x + (1 - a^n)\cdot 3$ este de ordin finit dacă $f_a^{(n)} = f_1$, deci $a^n = 1 \Rightarrow a = -1, f_{-1}(x) = -x + 6$ are ordinul 2 **(10p)**

Subiectul III.

Cu schimbarea de variabilã x= - t, avem:

$$I = \int_{1/2}^{-1/2} \frac{(\arcsin(-t))^2}{\sqrt{1-t^2}+1-t}(-dt) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin t)^2}{\sqrt{1-t^2}+1-t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}+1-x}dx$$

Prin adunare, obținem:

$$2I = \int_{-1/2}^{1/2} (\arcsin x)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x}\right)dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} (\arcsin x)^2 \cdot \frac{2(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}+1)^2 - x^2}dx = \int_{-1/2}^{1/2} (\arcsin x)^2 \cdot \frac{2(\sqrt{1-x^2}+1)}{2(1-x^2+\sqrt{1-x^2})}dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}(\arcsin x)^3\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \Rightarrow I = \frac{\pi^3}{648}$$

(10p)

Subiectul IV.

Relația $G'(x) = g(x)$ conduce la $\dfrac{f'(x)(2+\sin x) - f(x)\cos x}{(2+\sin x)^2} = f(x)(\sin 2x + 4\cos x)$ şi de aici se obține

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{2+\sin x} + 2\cos x(2+\sin x)^2.$$ **(10p)**

Rezultă $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx + 2\int \cos x(2+\sin x)^2 dx$ şi prin urmare se obține

$$\ln f(x) = \ln(2+\sin x) + \frac{2}{3}(2+\sin x)^3 + \ln|\mathfrak{C}| \Leftrightarrow f(x) = |\mathfrak{C}|\cdot e^{\frac{2}{3}(2+\sin x)^3}\cdot(2+\sin x).$$ **(10p)**